5. Sklaida kuloniniu potencialu.

Jeigu potencialo veikimo spindulys nėra baigtinis, tai $r \to \infty$ atveju Šredingerio lygtyje $V(r)$ mažėja sparčiau už įcentrinės energijos $\hbar^2 l(l+1)/2\mu r^2$, radialiosios Šredingerio lygties sprendinys (4 paskaita (4.3) arba (4.34) formulės) asimptotikoje turi sinusą, t.y. jį galima užrašyti sueinančių į centrą ir išeinančių iš centro sferinių bangų superpozicija. Vietoje potencialo įrašius dviejų krūvininkų sąveikos potencialą $V(r) = -Z_1 Z_2 e^2/r$, gaunama ši Šredingerio lygtis:

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}\right] u_l = 0. \tag{1}$$

$r \to \infty$ atveju ši lygtis nepereina į laisvos dalelės judėjimo lygtį. Vietoje jos gauname kitą lygtį:

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}\right] u_l = 0, \tag{2}$$

kurios sprendiniai niekada nepereina į (4.37) sinusoidę. (2) lygties sprendinį galima užrašyti dviejų funkcijų sandauga:

$$u_l(r)\Big|_{r\to\infty} \sim e^{\pm i(kr - n\ln r)}, \tag{3}$$

kur k – dalelės judėjimo kiekis, o n – bedimensinis parametras, kuris priklauso nuo krūvių ir sklaidomos dalelės greičio:

$$n = \frac{\mu Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2 k} = Z_1 Z_2 \frac{e^2}{\hbar v} = \frac{Z_1 Z_2}{137}\left(\frac{v}{c}\right)^{-1}. \tag{4}$$

Čia pasinaudota smulkiosios sandaros konstanta $\alpha = e^2/\hbar c = 137$, norint gauti n priklausomybę nuo v ir c. (3) išraišką įrašius į (2), galima įsitikinti, kad $u_l(r)$ tenkina laisvos dalelės banginę lygtį. Iš (3) matome, kad bet kokioms n vertėms, asimptotiniame sprendinyje yra logaritminė fazė.

Iš kvantinės mechanikos žinome, kad (1) lygties sprendinį diskretinio spektro būsenoms galima išreikšti išsigimusia hipergeometrine funkcija $F(a, b, z)$. Tą patį galima padaryti ir $E > 0$ atveju. Padarykime pakeitimą

$$u_l(r) = rR_l(r) = r^{l+1} e^{ikr} f_l(r) \tag{5}$$

ir įrašykime į (1). Gauname naują lygtį:

$$r\frac{d^2 f_l}{dr^2} + [2ikr + 2(l+1)]\frac{df_l}{dr} + [2ik(l+1) - 2nk] f_l = 0. \tag{6}$$

Ji yra tokia pat, kaip ir lygtis išsigimusiai hipergeometrinei funkcijai:

$$z\frac{d^2}{dr^2}F(a, b, z) + (b - z)\frac{d}{dz}F(a, b, z) - aF(a, b, z) = 0. \tag{7}$$

Pažymėkime atitinkamai $F(a,b,z)$ ir $G(a,b,z)$ reguliarųjį ir nereguliarųjį nulyje išsigimusios hipergeometrinės lygties sprendinius. Kai kurios jų savybės, kurių gali prireikti, yra šios:

$$F(a,b,z)\Big|_{z\to 0} = 1 + \frac{a}{b}\,\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}\,\frac{z^2}{2!} + \cdots, \tag{8}$$

$$F(a,b,z)\Big|_{z\to\infty} = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)}(-z)^a\left[1+\frac{(a-b+1)}{z}\right] + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}e^z z^{a-b} + \cdots, \tag{9}$$

$$G(a,b,z)\Big|_{z\to 0} \sim z^{1-b}, \tag{10}$$

$$G(a,b,z)\Big|_{z\to\infty} = 1 + \frac{ab}{1!z} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!z^2} + \cdots. \tag{11}$$

Čia $\Gamma(a)$ – gama funkcija.

(6) lygties bendrasis sprendinys yra tiesiškai nepriklausomų sprendinių superpozicija:

$$u_l(r) = r^{l+1}e^{ikr}\left\{C_l F(l+1+in;2l+2;-2ikr) + D_l G(l+1+in;2l+2;-2ikr)\right\}$$

$$\equiv C_l F_l(r) + D_l G_l(r), \tag{12}$$

kur C_l ir D_l – laisvai parenkamos konstantos, o funkcijų išraiškos yra šitokios:

$$F_l(r) \equiv r^{l+1}e^{ikr}F(l+1+in;2l+2;-2ikr), \tag{13}$$

$$G_l(r) \equiv r^{l+1}e^{ikr}G(l+1+in;2l+2;-2ikr). \tag{14}$$

Jos vadinamos reguliariąja ir nereguliariąja kuloninėmis banginėmis funkcijomis. Esant didelės r reikšmėms, jos elgiasi kaip

$$F_l(r)\Big|_{r\to\infty} \sim \sin(kr - l\pi/2 - n\ln 2kr + \sigma_l), \tag{15}$$

$$G_l(r)\Big|_{r\to\infty} \sim \cos(kr - l\pi/2 - n\ln 2kr + \sigma_l). \tag{16}$$

Čia pažymėta

$$\sigma_l = \arg\Gamma(l+1+in). \tag{17}$$

Taške $r=0$ dėl sąlygos $u_l(0)=0$ (12) išraiškoje lieka tiktai reguliarusis sprendinys. Todėl reikia parinkti $D_l = 0$. Dabar galima užrašyti dalelės sklaidos kuloniniu potencialu banginę funkciją:

$$\psi_c(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{u_l(r)}{r}P_l(\cos\theta) = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}C_l F_l(r)P_l(\cos\theta). \tag{18}$$

Jeigu konstantą C_l parinktume šitokią:

$$C_l = \frac{(2ikr)^l e^{-n\pi/2}\Gamma(l+1+in)}{(2l)!}, \tag{19}$$

tai $r \to \infty$ banginės funkcijos $\psi_l(\mathbf{r})$ pavidalas būtų panašus į dalelės, sklaidomos baigtinio veikimo spindulio potencialu, banginės funkcijos asimptotiką (2.47):

$$\psi_c(\mathbf{r}) = e^{i[kz+n\ln k(r-z)]} + f_c(\theta)\frac{e^{i[kr-n\ln 2kr]}}{r}. \tag{20}$$

(20) išraiškoje **kuloninės sklaidos amplitudė** yra šitokia:

$$f_c(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)\left(e^{2i\sigma_l}-1\right)P_l(\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)\left(\frac{\Gamma(l+1+in}{\Gamma(l+1-in)}-1\right)P_l(\cos\theta). \tag{21}$$

(20) ir (21) išraiškos surastos, panaudojant (15) formulę, gama funkcijos savybę $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\sin x = (1/2)(e^{ix} - e^{-ix})$ ir $e^{2ix} = \Gamma(1+ix)/\Gamma(1-ix)$. Pirmasis narys (20) išraiškoje aprašo sklaidomąją, o antrasis – išsklaidytąją bangas. Jos skirtumas nuo (2.47) formulės yra tas, kad jos iškraipytos logaritminės fazės daugiklio. Čia pasireiškia kuloninio potencialo toliasiekis veikimas. Tačiau, šie iškraipymai nėra esminiai sklaidomų dalelių srauto tankio suradimui ir sklaidai toli nuo kuloninio centro.

Norint surasti kuloninės sklaidos diferencialinį skerspjūvį, reikia žinoti sklaidomų dalelių srauto tankį $\mathbf{j}_0$. Jis surandamas pagal (2.50) formulę arba Bandzaičio ir Grabausko vadovėlio (4.4) formulę (psl. 75) (netinka $r = z$ atveju, t.y. sklaida pirmyn):

$$\mathbf{j}_0 = \hbar k/\mu. \tag{22}$$

Analogiˇkai surandamas ir išsklaidytų dalelių srautas $\mathbf{j}_1$:

$$\mathbf{j}_1 = \frac{|f_c|^2}{r^2}\frac{\hbar k}{\mu}. \tag{23}$$

Įrašome (22) ir (23) į diferencialinio skerspūvio apibrėžimą (2.49) ir surandame kuloninės sklaidos diferencialinio skerspjūvio išraišką:

$$\frac{d\sigma_c}{d\Omega} = |f_c|^2. \tag{24}$$