Daugiadalelė sklaidos teorija

7. Elastinė ir neelastinė dalelių sklaida struktūrine dalele Borno artinyje.

Borno artinys kaip pirmasis perturbacijų teorijos artinys.

Nagrinėjant dalelių sklaidą sudėtingos sandaros sistema, susiduriama su naujomis sąvokomis, kurių nebuvo sklaidos potencialu teorijoje. Tai – daugiadalelis sąveikos pobūdis, sužadinimas, jonizacija ir kt. Pradedant nuo paprasčiausio metodo – perturbacijų teorijos – bus įvesti svarbiausi terminai ir žymėjimai.

Dalele x vadinsime elektroną, protoną, neutroną ar kitą krūvininką, kuris susiduria su atomu, branduoliu, molekule. Pastaruosius vadinsime taikiniu A. Dalelės ir taikinio visuma bus vadinama sistema. Elastinės ir neelastinės sklaidos procesai bus atitinkamai užrašomi:

$$x + A \to x + A,$$

$$x + A \to x' + A^*. \tag{1}$$

Į dalelių tapatingumą ir sukinį pradžioje neatsižvelgsime. Laikysime, kad taikinys A yra be galo sunkus, lyginant su dalele x, t.y. nekreipsime dėmesio į skirtumus tarp sistemos svorio centro ir laboratorinės koordinačių sistemų.

Taikinio A vidinius kintamuosius žymėsime ξ, dalelės x erdvinę koordinatę – $\mathbf{r}$. $\hat{H}_A$ yra laisvo taikinio hamiltonianas. Jo tikrinės funkcijos $\Phi_n(\xi) \equiv |n\rangle$ ir tikrinės energijos ε_n surandamos, sprendžiant stacionariąją Šredingerio lygtį:

$$\hat{H}_A \Phi_n(\xi) = \varepsilon_n \Phi_n(\xi), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Taikinio pagrindinę būseną pažymėkime $\Phi_0(\xi)$, o jos energiją prilyginkime nuliui ($\varepsilon_n = 0$), t.y sužadintų būsenų energijas matuokime nuo pagrindinio lygmens. Diskretinių būsenų funkcijos ortogonalios

$$\langle \Phi_n(\xi) | \Phi_{n'}(\xi) \rangle = \delta(n, n') \tag{3}$$

ir kartu su tolydinio spektro funkcijomis sudaro pilną funkcijų rinkinį

$$\sum \Phi_n(\xi) \Phi_n^*(\xi') = \delta(\xi - \xi'). \tag{4}$$

(4) išraiškoje sumos ženklas reiškia sumavimą pagal taikinio diskretinį ir integravimą pagal tolydinį spektrą.

Tegul $\hat{K} = -\hbar^2\nabla^2/2\mu$ bus dalelės kinetinės energijos operatorius, $\hat{V} = \hat{V}(\xi, \mathbf{r})$ – jos sąveikos su taikiniu operatorius. Pilną sistemos hamiltonianą galima užrašyti šitaip:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{K} + \hat{V} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \tag{5}$$

kur

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_A + \hat{K} \tag{6}$$

yra sistemos iš tarpusavyje nesąveikaujačių dalelės ($\hat{K}$) ir taikinio ($\hat{H}_A$) hamiltonianas, o $\hat{V}$ – šios sistemos perturbacijos operatorius.

Sistemos perėjimo iš pagrindinės būsenos $|0\rangle$ į kažkurią diskretinę $|n\rangle$ būseną diferencialiniam skerspjūviui $d\sigma/d\Omega$ surasti pasinaudosime pirmuoju perturbacijų teorijos artiniu. Iš kvantinės mechanikos žinoma, kad sistemos perėjimo į tolydinio spektro būseną, veikiant pastoviam trikdžiui, spartos tankis užrašomas formule (A.Bandzaitis ir D.Grabauskas "Kvantinė mechanika", p. 156, (6.48) formulė):

$$\frac{d\Lambda}{d\gamma} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle\Psi_f^{(0)}|\hat{V}|\Psi_i^{(0)}\rangle\right|^2 \rho(E_f, \gamma)\bigg|_{E_f=E_i}. \tag{7}$$

Čia γ – visuma kvantinių skaičių, kurie kartu su energija E_f pilnai aprašo nesutrikdytos sistemos galinę būseną $\Psi_f^{(0)}$, kur $\{f\} = \{E_f, \gamma\}$. Mūsų atveju

$$\Psi_i^{(0)} = \Psi_{0,\mathbf{k}_i}^{(0)}(\mathbf{r}, \xi) = e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}}\Phi_0(\xi), \tag{8}$$

$$\Psi_f^{(0)} = \Psi_{n,\mathbf{k}_f}^{(0)}(\mathbf{r}, \xi) = e^{i\mathbf{k}_f\mathbf{r}}\Phi_n(\xi), \tag{9}$$

kur $\mathbf{k}_i$=$\mathbf{p}_i/\hbar$ ir $\mathbf{k}_f$=$\mathbf{p}_f/\hbar$ – krentančios ir išsklaidytos dalelių banginiai vektoriai (judėjimo kiekiai $\mathbf{p}_i$ ir $\mathbf{p}_f$). Galinės būsenos energija

$$E_f = \frac{p_f^2}{2\mu} + \varepsilon_n. \tag{10}$$

Iš energijos tvermės dėsnio seka, kad

$$\frac{p_f^2}{2\mu} + \varepsilon_n = \frac{p_i^2}{2\mu}. \tag{11}$$

Papildomo kvantinio skaičiaus vaidmenį (7) formulėje vaidina dalelės išlėkimo kryptis, kuri aprašoma vienetiniu vektoriumi $\hat{k}_f = \mathbf{k}_f/|\mathbf{k}_f|$. Todėl vietoje $d\gamma$ (7) formulėje galima įrašyti erdvinio kampo elementą $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, kur θ ir ϕ – sklaidos polinis ir azimutinis kampai. Dabar šuolio $|0\rangle \to |n\rangle$ spartos tankis (7) perrašomas šitaip:

$$\frac{d\Lambda}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle\mathbf{k}_f, n|\hat{V}|\mathbf{k}_i, 0\rangle\right|^2 \rho(n, \mathbf{k}_f). \tag{12}$$

Iš (12) matyti, kad galinių būsenų tankis $\rho(n, \mathbf{k}_f)$ priklauso tiktai nuo banginio vektoriaus $\mathbf{k}_f$. Būsenų tankio išraiška priklauso nuo galinės būsenos banginės funkcijos $\Psi^{(0)}_{\mathbf{k}_f}(\mathbf{r}, \xi)$ normavimo. Ji turi tenkinti pilnumo sąlygą:

$$\sum \int \Psi^{(0)}_{n,\mathbf{k}_f}(\mathbf{r}, \xi) \Psi^{(0)*}_{n,\mathbf{k}_f}(\mathbf{r}', \xi') \rho(n, \mathbf{k}_f) dE_f d\Omega = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(\xi - \xi'). \tag{13}$$

Iš (9) formulės matyti, kad normavimo konstanta lygi vienetui. Tuomet

$$\rho(n, \mathbf{k}_f) \to \rho(k_f) = \mu p_f/(2\pi\hbar)^3. \tag{14}$$

Jeigu funkcija $\Psi^{(0)}_{n,\mathbf{k}_f}(\mathbf{r}, \xi)$ normuotume kitaip, pavyzdžiui,

$$\tilde{\Psi}^{(0)}_{n,\mathbf{k}_f}(\mathbf{r}, \xi) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}_f\mathbf{r}} \Phi_n(\xi) \tag{15}$$

arba

$$\tilde{\Psi}^{(0)}_{n,\mathbf{k}_f}(\mathbf{r}, \xi) = \sqrt{\frac{\mu p_f}{(2\pi\hbar)^3}} e^{i\mathbf{k}_f\mathbf{r}} \Phi_n(\xi), \tag{16}$$

tuomet ir būsenų tankį reikėtų pakeisti atitinkamai į

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}_f) = \mu p_f, \tag{17}$$

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}_f) = 1. \tag{18}$$

Taigi, galutiniam rezultatui neturi reikšmės, kokį normavimo daugiklį parenkame funkcijai $\Psi^{(0)}_{n,\mathbf{k}_f}(\mathbf{r}, \xi)$, jeigu sutinkamai su (13) sąlyga teisingai parenkame galinių būsenų tankį $\rho(n, \mathbf{k}_f)$. Jie turi būti tarpusavyje suderinti. Pakeitus galinės būsenos funkcijos normavimo daugiklį, pasikeičia ir būsenų tankis.

Įrašius (14) į (12), gaunama šuolio iš taikinio pagrindinės būsenos $|0\rangle$ į sužadintą diskretinę būseną $|n\rangle$ tikimybė per laiko vienetą į išlekiančių dalelių vienetinį erdvinį kampą. Tikimybę padalinus iš sklaidomų dalelių srauto tankio j_0, gaunamas diferencialinis skerspjūvis:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\mathbf{j}_0} \frac{d\Lambda}{d\Omega}. \tag{19}$$

$\mathbf{j}_0$ surandamas pagal srovės tankio (2.50) formulę $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = (-i\hbar/2\mu)(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*)$, įrašius pradinės būsenos banginę funkciją $\Psi^{(0)}_{0,\mathbf{k}_i}(\mathbf{r}, \xi)$, normuotą (8) sąlyga:

$$\mathbf{j}_0 = \hbar \mathbf{k}_i/\mu = \mathbf{p}_i/\mu = \mathbf{v}_i. \tag{20}$$

Čia $\mathbf{v}_i$ – krentančių į taikinį dalelių greitis. Įrašome (20) į (19) ir surandame diferencialinio skerspjūvio išraišką:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{p_f}{p_i} \left(\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \left| \langle \mathbf{k}_f, n | \hat{V} | \mathbf{k}_i, 0 \rangle \right|^2. \tag{21}$$

Kai $|n\rangle = |0\rangle$, (21) formulė aprašo elastinės sklaidos, o $|n\rangle \neq |0\rangle$ – neelastinės sklaidos arba sužadinimo diferencialinį skerspjūvį.

(21) išraišką patogiau naudoti šitokiu pavidalu:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{p_f}{p_i}\left|F^B_{n0}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)\right|^2, \tag{22}$$

kur

$$F^B_{n0}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\langle \mathbf{k}_f, n|\hat{V}|\mathbf{k}_i, 0\rangle = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int \Phi^*_n(\xi)e^{-i\mathbf{k}_f\mathbf{r}}V(\xi, \mathbf{r})e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}}\Phi_0(\xi)d^3rd^3\xi \tag{23}$$

vadinama dalelės sklaidos sudėtine sistema **Borno amplitude**. Atskiru atveju, kai taikinys neturi vidinės struktūros, $\hat{V}(\xi, \mathbf{r}) \to \hat{V}(\mathbf{r})$, $\mathbf{p}_f \to \mathbf{p}_i$, o (22) ir (23) formulės pereina į potencialinės sklaidos (3.3) ir (2.48) formules.

Greitų elektronų elastinė sklaida

Surastas išraiškas pritaikysime elektronų sklaidai atomais. Stengsimės taikyti taip, kad rezultatai nepriklausytų nuo atomo banginių funkcijų konkretaus pavidalo. Į dalelių tapatingumą ir sukinius neatsižvelgsime.

Nagrinėjamu atveju perturbacijos operatorius $\hat{V}$ yra lygus sklaidomo elektrono sąveikos su atomo branduoliu ir visais Z atomo elektronais operatoriui:

$$\hat{V} = \hat{V}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_Z) = -\frac{Ze^2}{r} + \sum_{j=1}^{Z}\frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}. \tag{24}$$

Tuomet Borno sklaidos amplitudę (23) galima užrašyti šitaip:

$$F^B_{n0}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d^3r\, e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\int \Phi^*_n(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_Z)\left\{-\frac{Ze^2}{r} + \sum_{j=1}^{Z}\frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}\right\}$$
$$\times\Phi_0(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_Z)d^3r_1 \ldots d^3r_Z. \tag{25}$$

Čia $\mathbf{q}$=$\mathbf{k}_i$−$\mathbf{k}_f$. (25) lygties pirmasis narys $(-Ze^2/r)$, aprašantis sklaidomo elektrono sąveiką su atomo branduoliu, nelygus nuliui tiktai elastinei sklaidai, kurią dabar ir nagrinėsime. Jei $n = 0$, elastinės sklaidos Borno amplitudė yra:

$$F^B_{el}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = -\frac{2\mu e^2}{\hbar^2}\frac{Z}{q^2}\left\{-1 + \frac{1}{Z}\langle 0|\sum_{j=1}^{Z}e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_j}|0\rangle|\right\}. \tag{26}$$

Čia integravimui pagal sklaidomo elektrono erdvinę koordinatę naudota formulė:

$$\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}d^3r = e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_j}\int\frac{e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \mathbf{q}\mathbf{r}_j)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}d^3r = \frac{4\pi}{q^2}e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_j} \tag{27}$$

ir įvestas pažymėjimas

$$\langle n|\sum_{j=1}^{Z} e^{i\mathbf{qr}}|0\rangle \equiv \int \Phi_n^*(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_Z)\left[\sum_{j=1}^{\infty} e^{i\mathbf{qr}_j}\right]\Phi_0(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_Z)d^3r_1\ldots d^3r_Z. \quad (28)$$

Kai $|n\rangle = |0\rangle$, (28) matricinis elementas yra lygus atomo pagrindinės būsenos elektronų tankio Furje atvaizdui:

$$\langle 0|\sum_{j=1}^{Z} e^{i\mathbf{qr}}|0\rangle = \int \rho_e(\mathbf{r})e^{i\mathbf{qr}}d^3r, \quad (29)$$

$$\rho_e(\mathbf{r}) = \langle 0|\sum_{j=1}^{Z}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)|0\rangle, \quad (30)$$

$$\int d^3r\rho_e(\mathbf{r}) = Z.$$

Įveskime elektronų tankio formfaktorių

$$\mathcal{F}_e(\mathbf{q}) = \frac{1}{Z}\int \rho_e(\mathbf{r})e^{i\mathbf{qr}}d^3r \quad (31)$$

ir užrašykime Borno sklaidos amplitudę šitaip:

$$F_{el}^B(\mathbf{k}_f,\mathbf{k}_i) = \frac{2\mu e^2}{\hbar^2}\frac{Z}{q^2}\left\{-1+\mathcal{F}_e(\mathbf{q})\right\}. \quad (32)$$

Žinant amplitudę, lengva užrašyti elastinės sklaidos diferencialinį skerspjūvį:

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R |-1+\mathcal{F}_e(\mathbf{q})|^2, \quad (33)$$

kur $(d\sigma/d\Omega)_R$ – elastinės sklaidos vienetiniu taškiniu krūviu (Rezerfordo) diferencialinis skerspjūvis (3.29) $(d\sigma/d\Omega)_R = 4\mu^2 Z_1^2 Z_2^2 e^4/(\hbar^4 q^4))$.

Dažnai atomų pagrindinėje būsenoje elektronų tankio pasiskirstymas būna sferiškai simetrinis, t.y.

$$\rho_e(\mathbf{r}) \to \rho_e(r). \quad (34)$$

Tuomet formfaktorius (31) priklauso tiktai nuo perduoto judėjimo kiekio $\mathbf{q}$ modulio:

$$\mathcal{F}_e(\mathbf{q}) \to \mathcal{F}_e(q) \quad (35)$$

ir nepriklauso nuo azimutinio kampo ϕ. Tas pat būna ir ašinės simetrijos atveju.

Formfaktoriaus normavimo sąlyga seka iš (31)

$$\mathcal{F}_e(0) = 1,$$

nes

$$\int \rho_e(\mathbf{r})e^{i\mathbf{0}\cdot\mathbf{r}}d^3r = Z.$$

Esant mažiems q, formfaktorius išreiškiamas elektronų apvalkalo vidutiniu spinduliu:

$$\mathcal{F}_e(q)\Big|_{q\to 0} = 1 - \frac{1}{6}q^2\langle r^2\rangle + \dots . \tag{36}$$

Įrašius (36) į (32), matyti, kad, nors atomas vidutiniškai kvazineutrali sistema, tikimybė išsklaidyti elektroną netgi labai mažais kampais nelygi nuliui:

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega}\Big|_{\theta\to 0} = \frac{\mu^2 e^4 Z^2}{9\hbar^4}(\langle r^2\rangle)^2. \tag{37}$$

Čia pasireiškia kuloninės sąveikos toliasiekiškumas. Diferencialinio skerspjūvio (37) nereikėtų priimti kaip patikimo rezultato, nes Borno amplitudė (36) yra reali ir $q = 0$ atveju netenkina optinės teoremos.

Atomų sužadinimas greitais elektronais

Iš (25) formulės seka, kad $|n\rangle \neq |0\rangle$ atveju, kas atitinka neelastinę sklaidą, pirmasis narys, aprašantis sklaidomo elektrono sąveiką su atomo branduoliu, lygus nuliui. Tuomet atomo sužadinimo amplitudė išreiškiama atomo neelastinės sklaidos formfaktoriumi $\mathcal{F}_{n0}(\mathbf{q})$:

$$F^B_{n0}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = -\frac{2\mu e^2}{\hbar^2}\frac{1}{q^2}\mathcal{F}_{n0}(\mathbf{q}), \tag{38}$$

o sužadinimo diferencialinis skerspjūvis, gaunamas iš (33) atmetant vienetą, yra šitoks:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{p_f}{p_i}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R |\mathcal{F}_{n0}(\mathbf{q})|^2. \tag{39}$$

(38) ir (39) formulėse neelastinės sklaidos formfaktorius yra apibrėžtas šitaip:

$$\mathcal{F}_{n0}(\mathbf{q}) = \langle n|\sum_{j=1}^{Z} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_j}|0\rangle, \qquad |n\rangle \neq |0\rangle. \tag{40}$$

Panagrinėkime neelastinę sklaidą, kai perduotas judėjimo kiekis mažas

$$q \ll 1/a, \tag{41}$$

kur a – atomo vidutinius matmenis nusakantis parametras. Skleidžiame (40) išraiškos eksponentę Teiloro eilute

$$e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} = 1 + i\mathbf{q}\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{q}\mathbf{r})^2 + \dots,$$

atsižvelgiame į banginių funkcijų ortogonalumą ($\langle n|0\rangle = 0$) ir mažiems q gauname, kad neelastinės sklaidos formfaktorius išreiškiamas elektrinio dipolinio šuolio operatoriaus matriciniu elementu:

$$\mathcal{F}_{n0}(\mathbf{q})\Big|_{q\to 0} = \frac{1}{e}\,\mathbf{q}\,\langle n|\hat{D}|0\rangle, \tag{42}$$

kur

$$\hat{D} = \sum_{j=1}^{Z} e\mathbf{r}_j. \tag{43}$$

Taigi, jeigu perduotas judėjimo kiekis mažas, tai didžiausia tikimybė yra sužadinti tuos lygmenis, kuriems galioja elektromagnetinių E1 šuolių atrankos taisyklės, t.y. galimi optiškai leistini šuoliai:

$$\begin{cases} L_n = L_0 \pm 1,\ L_0, \\ J_n = J_0 \pm 1,\ J_0, \\ \pi_n = -\pi_i. \end{cases} \tag{44}$$

Čia π_n žymi lygiškumą.

Diferencialinis sužadinimo skerspjūvis. Atomo diskretinės būsenos aprašomos apibrėžtu judėjimo kiekio momentu. Kadangi į sukinius neatsižvelgiame, jos gali būti aprašytos orbitiniu judėjimo kiekio momentu. Nagrinėjame atomo sužadinimą iš būsenos L_0 į būseną L_n:

$$A(L_0) + e \to A^*(L_n) + e'. \tag{45}$$

Jeigu judėjimo kiekio momento L_0 orientacija nėra apibrėžta, o detektorius nejautrus L_n krypčiai, tai sužadinimo dalinį (parcialinį) skerspjūvį reikia sumuoti galinės ir vidurkinti pradinės būsenos projekcijų M_0 ir M_1 atžvilgiu:

$$\frac{d\sigma_n}{d\Omega} = \frac{p_f}{p_i}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R \frac{1}{2L_0+1} \sum_{M_0, M_n} |\langle nL_nM_n| \sum_{j=1}^{Z} e^{i\mathbf{qr}} |0L_0M_0\rangle|^2. \tag{46}$$

Čia į (39) buvo įrašyta (40). Dalinį skerspjūvį reikia skirti nuo skleidinio dalinėmis bangomis atskiro nario diferencialinio skerspjūvio, todėl jį geriau vadinti parcialiniu diferencialiniu skerspjūviu.

Sumavimui pagal M_0 ir M_n atlikti reikia eksponentę (46) išraiškoje išskeisti dalinėmis bangomis pagal (4.4) ir (4.6) formules:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{Z} e^{i\mathbf{qr}} &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} i^{\lambda}(2\lambda+1) \sum_{j=1}^{Z} j_{\lambda}(qr_j)\ P_{\lambda}(\cos\theta_{qr}) \\ &= \sum_{\lambda,\mu} 4\pi i^{\lambda} \left[\sum_{j=1}^{Z} j_{\lambda}(qr_j) Y_{\lambda\mu}(\hat{n}_j)\right]\ Y^*_{\lambda\mu}(\hat{n}_q). \end{aligned} \tag{47}$$

Čia $\hat{n}_j$ ir $\hat{n}_q$ – vektorių $\mathbf{r}_j$ ir $\mathbf{q}$ krypčių vienetiniai vektoriai, o θ_{qr} – kampas tarp šių krypčių. Pagal Vignerio ir Ekarto teoremą matriciniai elementai susiejami su submatriciniais šitaip:

$$\langle nL_nM_n| \sum_{j=1}^{Z} |j_{\lambda}(qr_j) Y_{\lambda\mu}(\hat{n}_j)| 0L_0M_0\rangle = \begin{bmatrix} \lambda & L_0 & L_n \\ \mu & M_0 & M_n \end{bmatrix}$$

$$\times\langle nL_n||\sum_{j=1}^{Z} j_\lambda(qr_j)Y_{\lambda\mu}(\hat{n}_j)||0L_0\rangle, \quad (48)$$

kur

$$\mathcal{F}_{n0}^{(\lambda)}(q) \equiv \langle nL_n||\sum_{j=1}^{Z} j_\lambda(qr_j)Y_{\lambda\mu}(\hat{n}_j)||0L_0\rangle \quad (49)$$

vadinamas **multipoliniu formfaktoriumi**. (48) išraiškoje gali būti $(2L_n+1)^{-1/2}$ daugiklis, priklausomai nuo submatricinio elemento apibrėžimo.

Įrašome (48) į (46) ir, pasinaudoję Klebšo ir Gordano koeficientų savybėmis sumavimui pagal M_0 ir M_m, surandame šuolio $|0\rangle \to |n\rangle$ diferencialinio skerspjūvio išraišką multipoliniais formfaktoriais:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{p_f}{p_i}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R \frac{4\pi}{2L_0+1}\sum_\lambda |\mathcal{F}_{n0}^{(\lambda)}(q)|^2 = \sum_\lambda \frac{d\sigma^{(\lambda)}}{d\Omega}. \quad (50)$$

Iš (50) formulės matyti, kad sumavimo pagal M_0 ir M_m pasekoje nebeliko priklausomybės nuo perduoto judėjimo kiekio krypties.

Pasinaudojus $j_\lambda(qr)|_{r\to 0}\approx (qr)^\lambda/(2\lambda+1)!!$ išraiška, galima surasti, kad mažiems q, multipoliniai formfaktoriai elgiasi šitaip:

$$\mathcal{F}_{n0}^{(\lambda)}(q)|_{q\ll 1/a}\sim q^\lambda. \quad (51)$$

Kadangi Rezerfordo diferencialinis skerspjūvis $(d\sigma/d\Omega)_R \sim 1/q^4$, gauname, kad

$$\left.\frac{d\sigma^{(\lambda)}}{d\Omega}\right|_{q\ll 1/a}\sim \frac{1}{q^{4-2\lambda}}. \quad (52)$$

Bet kokio parcialinio šuolio diferencialinis skerspjūvis niekada nepasidaro begalinis $\theta = 0$ kampui, nes $q_{min} = k_i - k_f > 0$, kuo sužadinimo diferencialinis skerspjūvis ir skiriasi nuo elastinės sklaidos diferencialinio skerspjūvio.

Pilnutinis sužadinimo skerspjūvis surandamas diferencialinį skerspjūvį integruojant visomis išsklaidyto elektrono kryptimis:

$$d\sigma_n = \int \frac{d\sigma_n}{d\Omega}d\Omega. \quad (53)$$

Kadangi Borno artinyje $d\sigma/d\Omega$ nuo sklaidos kampų priklauso per perduotą judėjimo kiekį q, patogu integravimą kampų atžvilgiu pakeisti integravimu pagal perduotą judėjimo kiekį:

$$\int \frac{d\sigma_n}{d\Omega}d\Omega = 2\pi\int_{q_{min}=k_i-k_f}^{q_{max}=k_i+k_f} \frac{d\sigma_n}{d\Omega}\frac{qdq}{k_ik_f}. \quad (54)$$

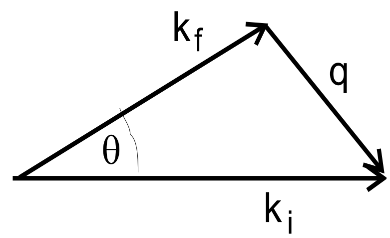
Šiam perėjimui panaudotas sąryšis:

$$q^2 = (\mathbf{k}_i - \mathbf{k_f})^2 = k_i^2 + k_f^2 - 2k_ik_f\cos\theta, \quad (55)$$

$$2qdq = -2k_ik_fd(\cos\theta) = 2k_ik_f\sin\theta d\theta,$$

$$d\Omega = 2\pi\frac{qdq}{k_ik_f},$$

kuris seka iš vektorių $\mathbf{k}_i$, $\mathbf{k}_f$, ir $\mathbf{q}$ trikampio, pavaizduoto 1 pav.



1 pav. Perduoto judėjimo kiekio $\mathbf{q}$ suradimas.

Mažoms q reikšmėms, kai galioja dipolinis artinys ($\lambda = 1$), diferencialinis skerspjūvis, naudojant (52)formulę, elgiasi šitaip:

$$\frac{d\sigma^{(\lambda)}}{d\Omega} \sim \frac{1}{q^2}. \tag{56}$$

(53) integralą lengva suintegruoti tuomet, kai q mažas ir didžiausią indėlį duoda dipolinis narys $i\mathbf{qr}$ iš $e^{i\mathbf{qr}}$ skleidinio Teiloro eilute (pirmojo nario indėlis lygus nuliui dėl banginių funkcijų ortogonalumo). Jo submatricinį elementą galima išreikšti osciliatoriaus stiprumu f_{n0}, o diferencialinį skerspjūvį (53) perrašyti šitaip:

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{q\ll 1/a} = \frac{p_f}{p_i}\frac{4\mu e^4}{q^4}q^2\frac{\hbar^2 f_{n0}}{2m_e\varepsilon_n} = \frac{p_f}{p_i}\frac{2\mu\hbar^2e^4}{m_e\varepsilon_n}\frac{1}{q^2}f_{n0}. \tag{57}$$

Tuomet galima surasti pilnutinio skerspjūvio aproksimacinę formulę, įrašant (57) į (54),

$$\sigma_n \sim \frac{f_{0n}}{E\varepsilon_n}\ln\left(\frac{E}{\varepsilon_n}\right), \tag{58}$$

kuri vadinama **Bete formule**. čia $\varepsilon = E_0 - E_n$, E – elektrono energija. Naudotos formulės

$$\theta = 0, \quad q_{min} = k_i - k_f \to \frac{\mu\epsilon_n}{\hbar^2 k_i},$$

$$\theta = \pi, \quad q_{max} = k_i + k_f \to 2k_i = 2\frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}.$$