3. Borno artinys

Sklaidos amplitudės skleidinys

Stacionariosios teorijos metodais surastos formulės

$$\psi^{(+)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}} + \int G_0^{(+)}(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}')\; V(\mathbf{r}')\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}')d^3r', \tag{1}$$

$$\psi^{(+)}(\mathbf{r})|_{r\to\infty} = e^{i\mathbf{kr}} + f(\mathbf{k}', \mathbf{k})\frac{e^{i\mathbf{kr}}}{r}, \tag{2}$$

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'}V(\mathbf{r}')\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}')d^3r' \tag{3}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 \tag{4}$$

tėra formalus uždavinio sprendimas. Iš jų neaišku, kaip, esant žinomam potencialui, praktiškai surasti $\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r})$, jos asimtotiką, sklaidos amplitudę ir diferencialinį skerspjūvį.

Jeigu potencialas $V(\mathbf{r})$ mažas (apie jo mažumą pakalbėsime vėliau), (1) lygtį galima spręsti artutinai iteracijų metodu. Vietoje $\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}')$ į (1) formulės dešinę pusę įstatome tą pačią (1) $\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r})$ išraišką su $r = r'$:

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}') \approx e^{i\mathbf{kr}'} + \int G_0^{(+)}(E, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')\; V(\mathbf{r}'')\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{kr}'')d^3r'' + \cdots. \tag{5}$$

Šitoks banginės funkcijos užrašymas vadinamas skleidimu sąveikos atžvilgiu. Įrašydami (5) į (3), galime surasti analogišką skleidinį ir sklaidos amplitudei:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}V(\mathbf{r})e^{i\mathbf{kr}}d^3r \\ -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}&\int\int e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'}V(\mathbf{r}')G_0^{(+)}(E, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')V(\mathbf{r}'')e^{i\mathbf{kr}''}d^3r'd^3r'' + \cdots \\ &= f^{(1)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + f^{(2)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + \cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}). \end{aligned} \tag{6}$$

$f^{(n)}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ vadinama skleidinio sąveikos atžvilgiu n-tos eilės sklaidos amplitude.

Kai sąveika maža, (6) skleidinyje galima palikti tiktai pirmąjį narį. Gauname pirmojo Borno artinio sklaidos amplitudę:

$$f_B(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = f^{(1)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}V(\mathbf{r})e^{i\mathbf{kr}}d^3r. \tag{7}$$

Iš (7) matyti, kad pirmajame Borno artinyje sklaidos amplitudė priklauso tiktai nuo perduoto judėjimo kiekio

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'. \tag{8}$$

Nuo jo priklauso ir radijinė, ir kampinė sklaidos amplitudės dalys, o pati amplitudė tėra sąveikos potencialo Furje atvaizdas:

$$f_B = f_B(\mathbf{q}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int V(\mathbf{r})\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})d^3r. \tag{9}$$

Taigi pirmajame Borno artinyje dalelės, sklaidomos jėgos centru, diferencialinis skerspjūvis skaičiuojamas pagal formulę:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_B(\mathbf{q})|^2 = \left(\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \left|\int V(\mathbf{r})\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})d^3r\right|^2. \tag{10}$$

Atkreipiame dėmesį, kad perduoto judėjimo kiekio vektorius $\mathbf{q}$ yra vienintelė energijos ir kampų kombinacija, nuo kurios pirmajame Borno artinyje priklauso diferencialinis sklaidos skerspjūvis. Jeigu potencialas pasižymi sferine simetrija

$$V(\mathbf{r}) = V(r), \tag{11}$$

diferencialinis sklaidos skerspjūvis priklauso tiktai nuo perduoto judėjimo kiekio modulio. Tuomet sklaidos amplitudę (9) galima suintegruoti kampų atžvilgiu ir gauti šią išraišką:

$$\begin{aligned} f_B = f_B(q) &= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\frac{4\pi}{q}\int_0^\infty V(r)\sin(qr)rdr \\ &= -\frac{2\mu}{q\hbar^2}\int_0^\infty V(r)\sin(qr)rdr. \end{aligned} \tag{12}$$

Borno artinio taikymo ribos

Ieškodami Borno sklaidos amplitudės į antrąjį sumos (1) narį vietoje tikslaus Lipmano ir Švingerio lygties sprendinio $\psi^{(+)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ įrašėme plokščią bangą $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, kuri aprašo skriejančią į taikinį dalelę. Tai reiškia, kad darome prielaidą, jog antrasis sumos narys visoje srityje $r < d$ laikomas mažu, lyginant su pirmuoju, t.y.

$$\left|\int G_0^{(+)}(E,\mathbf{r},\mathbf{r}')\, V(\mathbf{r}')\psi^{(+)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}')d^3r'\right|_{r<d} \ll 1. \tag{13}$$

Nelygybė (13) yra pakankama sąlyga, kad būtų galima taikyti pirmąjį Borno artinį. Įvertinsime šią nelygybę (13). Tam tikslui vietoje tikslaus sprendinio vėl įrašysime plokščią bangą, o vietoje Gryno funkcijos – jos išraišką (2.35) iš antrosios paskaitos. Gauname šitokią nelygybę:

$$\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\left|\int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}V(\mathbf{r}')e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'}d^3r'\right| \ll 1. \tag{14}$$

Integralo (14) skaičiavimas gana sudėtingas, todėd jį dar supaprastinsime. Potencialą $V(\mathbf{r})$ laikysime sferiškai simetrišku (11) ir surasime (14) išraišką taške $r = 0$:

$$\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\left|\int e^{i(kr'+\mathbf{kr}')}\frac{1}{|\mathbf{r}'|}V(\mathbf{r}')d^3r'\right| = \frac{\mu}{\hbar^2 k}\left|\int_0^\infty V(r')(e^{2ikr'}-1)dr'\right| \ll 1. \tag{15}$$

Reikia nepamiršti, kad nagrinėjame baigtinio veikimo spindulio potencialus, todėl (15) integruojama tik vidinėje srityje $r \leq d$.

Dabar panagrinėkime du ribinius atvejus: $kd \ll 1$ ir $kd \gg 1$. Pirmuoju atveju dalelės De Broilio bangos ilgis $\lambda = 1/k$ yra daug didesnis, o antruoju – daug mažesnis už sąveikos potencialo veikimo sritį d. Po paprastų veiksmų seka, kad:

Jeigu $kd \gg 1$, tai

$$|\overline{V}| \ll \frac{1}{kd}\frac{\hbar^2 k^2}{\mu} = \frac{2}{kd}E, \tag{16}$$

čia $\overline{V} = (1/d)\int V(r)dr$.

Jeigu $kd \ll 1$, tai

$$|\overline{V}| \ll \frac{\hbar^2}{2\mu d^2}, \tag{17}$$

kur $\overline{V} = (1/d^2)\int rV(r)dr$.

Matome, kad $kd \gg 1$ atveju, (16) sąlyga yra daug stipresnė už reikalavimą

$$|\overline{V}| \ll E, \tag{18}$$

reiškiantį sąveikos vidutinės energijos mažumą, lyginant su krentančios dalelės energija. Kai $kd \ll 1$, sąlyga (17) traukiančiojo potencialo atveju sutampa su reikalavimu, kad potencialo duobėje, kurios gylis $\overline{V}$ ir plotis d, nebūtų nei vieno lygmens. Dalelės duobėje energija yra $E_n = \pi^2\hbar^2 n^2/2md$, kur $n = 1, 2, 3, ...$ (žr. A.Bandzaitis, D.Grabauskas "Kvantinė mechanika", (5.10) formulę).

Taigi Borno artinys tinka, kai

1. Sklaidomos dalelės energija didelė;
2. Sąveika tarp dalelės ir jėgos centro silpna;
3. Sklaidos kampas mažas.

Greitų dalelių sklaidos baigtinio spindulio potencialu priklausomybė nuo kampo ir energijos.

Panagrinėsime greitų dalelių ($kd \gg 1$) sklaidos baigtinio veikimo spindulio potencialu bendruosius kokybinius dėsningumus. Panagrinėsime konkretų pavyzdį. Borno artinyje surasime dalelės sklaidos Jukavos potencialu diferencialinį ir pilnutinį skrspjūvius. Jukavos potencialas

$$V(r) = A\frac{e^{-r/a}}{r} \tag{19}$$

tinka ir ekranuotam kuloniniam potencialui aprašyti. Įrašome (19) į (12) ir surandame sklaidos amplitudę:

$$f_B(q) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\,\frac{Aa^2}{1+(qa)^2}. \tag{20}$$

Diferencialinis skerspjūvis lygus sklaidos amplitudės kvadratui:

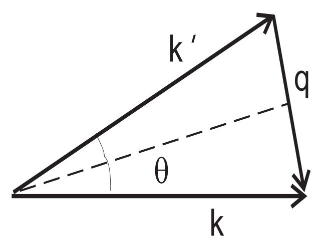
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_B(q)|^2 = -\frac{4\mu^2 A^2 a^4}{\hbar^4}\,\frac{1}{[1+(qa)^2]^2}. \tag{21}$$

Šio skerspjūvio priklausomybę nuo kampo aprašo perduotasis judėjimo kiekis q. Jam surasti pasinaudosime 1 pav. Iš geometrijos seka, kad

$$q = 2k\ \sin(\theta/2). \tag{22}$$

Įrašome (22) į (21) ir gauname:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2 A^2 a^4}{\hbar^4}\,\frac{1}{\left[1+4k^2a^2\ \sin^2(\theta/2)\right]^2}. \tag{23}$$



1 pav. Perduotojo judėjimo kiekio geometrija.

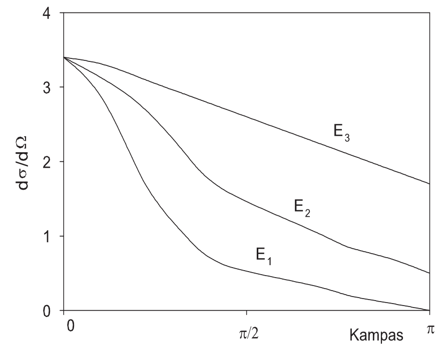
Iš (23) formulės matyti, kad diferencialinis skerspjūvis įgyja didžiausią reikšmę, kai kampas $\theta = 0$. Jis monotoniškai mažėja, kai sklaidos kampas didėja. Diferencialinio skerspjūvio kitimo sparta tuo didesnė, kuo sklaidomosios dalelės energija didesnė ($k = p/\hbar = (\mu v)/\hbar = \sqrt{2\mu E}/\hbar$). Kitaip sakant, kuo energija didesnė, tuo daugiau dalelės sklaidomos mažais kampais, t.y. daugiau dalelių nukrypsta pirmyn. Šį teiginį iliustruoja 2 pav.

Surasime **pilnutinį sklaidos skerspjūvį**. Tam tikslui reikia diferecialinį skerspjūvį integruoti visų kampų, kuriais nukrypsta išsklaidytos dalelės, atžvilgiu:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega. \tag{24}$$

Reikia atkreipti dėmesį į tai, kad sferiškai simetrinio potencialo atveju ir esant diferencialinio skerspjūvio priklausomybei nuo perduotojo judėjimo kiekio, patogu integruoti pakeičiant integravimą pagal kampus integravimu pagal perduotąjį judėjimo kiekį q. Iš (22) formulės seka, kad

$$d\Omega = 2\pi\,\frac{qdq}{k^2}, \tag{25}$$



2 pav. Dalelių, išsklaidytų Jukavos arba ekranuotu kuloniniu potencialu, kampinis pasiskirstymas įvairioms energijoms $E_1 > E_2 > E_3$.

kur $q_{min} = 0$ ($\theta = 0$) ir $q_{max} = 2k$ ($\theta = \pi$). Panaudodami (25), integruojame (24):

$$\sigma = \frac{2\pi}{k^2}\int_0^{2k}\frac{d\sigma}{d\Omega}qdq = \frac{16\pi\mu^2A^2a^4}{\hbar^4}\,\frac{1}{1+4k^2a^2}. \tag{26}$$

Iš (26) formulės matyti, kad, esant $kd \gg 1$, Borno artinyje apskaičiuotas sklaidos pilnutinis skerspjūvis σ mažėja didėjant sklaidomosios dalelės energijai kaip

$$\sigma|_{ka\gg 1} \sim 1/E, \tag{27}$$

nes $ka \gg 1$ atveju (26) formulės vardiklyje esantį vienetą galima atmesti, o $E = \hbar^2k^2/2\mu$.

Surastieji kokybiniai dėsningumai galioja ne tik Jukavos potencialui, bet ir visiems baigtinio veikimo spindulio potencialams.

Rezerfordo formulė. Sklaida baigtinio tūrio krūvininku.

Jeigu Jukavos potenciale prileistume, kad $a \to \infty$ ir parinktume $A = Z_1Z_2e^2$, tuomet iš (20) formulės lengvai surastume taškinio krūvininko sklaidos taškiniu kuloniniu potencialu amplitudę:

$$f_B^c(q) = -\frac{2\mu e^2Z_1Z_2}{\hbar^2q^2}. \tag{28}$$

Joje atmetėme vienetą, nes $a \gg 1$. Įrašę (28) į (21), gauname Rezerfordo formulę, kurią Rezerfordas surado klasikinės teorijos metodais:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R = \frac{\mu^2Z_1^2Z_2^2e^4}{4\hbar^4k^4}\,\frac{1}{\sin^4(\theta/2)} = \frac{4\mu^2Z_1^2Z_2^2e^4}{\hbar^4q^4}. \tag{29}$$

Jeigu (29) suintegruotume kampų arba perduotojo judėjimo kiekio atžvilgiu, pamatytume, kad pilnutinis skerspjūvis diverguoja.

Dviejų nereliatyvistinių taškinių krūvininkų kuloninės sąveikos uždavinys yra unikalus tuo požiūriu, kad čia visiškai sutampa diferencialiniai skerspjūviai, surasti trimis skirtingais metodais:

a) tiksliai sprendžiant sklaidos uždavinį klasikinės mechanikos metodais;

b) apytikriai sprendžiant sklaidos uždavinį Borno artinyje;

c) tiksliai sprendžiant sklaidos uždavinį kvantinės mechanikos metodais.

Taip nutinka todėl, kad kuloninės sąveikos hamiltonianas pasižymi ypatingomis simetrijos savybėmis. Dar vienas pavyzdys yra kvantinės mechanikos kurse nagrinėtas atsitiktinis dalelės kuloniniame lauke energijos lygmenų išsigimimas.

Pereikime prie taškinio krūvininko sklaidos nejudančiu baigtinių matmenų krūviu. Tegul Z_1 bus taškinės dalelės krūvis, o $\rho(\mathbf{r})$ – taikinio krūvio tankis. Tegul jo normavimas bus šitoks:

$$\int \rho(\mathbf{r})\, d^3r = Z_2. \tag{30}$$

Dideliuose atstumuose krūviai Z_1 ir Z_2 sąveikoja pagal Kulono dėsnį $V_c(r) = Z_1 Z_2 e^2/r$, o bet kokiai r reikšmei sąveikos potencialą galime užrašyti štaip:

$$V(\mathbf{r}) = Z_1 e^2 \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r'. \tag{31}$$

Įrašykime šią išraišką į Borno sklaidos amplitudę (9):

$$f(\mathbf{q}) = -\frac{\mu Z_1 e^2}{2\pi\hbar^2} \int\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3r d^3r'. \tag{32}$$

Dvigubą integralą surasime pagal labai naudingą formulę, kurią verta prisiminti:

$$\begin{aligned}\int\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3r d^3r' &= \int\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}-i\mathbf{q}\mathbf{r}'} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}'} d^3r d^3r' \\ &= \int \rho(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}'} d^3r' \int \frac{e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|} d^3x = \frac{4\pi}{q^2} \int \rho(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}'} d^3r'. \end{aligned} \tag{33}$$

Prieš užrašydami galutinę išraišką dar įvesime vieną pažymėjimą $F(\mathbf{q})$, kuris vadinamas taikinio **krūvio tankio formfaktoriumi** arba tiesiog **krūvio formfaktoriumi**:

$$F(\mathbf{q}) \equiv \frac{1}{Z_2} \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3r. \tag{34}$$

Įrašome (33) ir (34) į (32) ir gauname, kad taškinio krūvininko sklaidos baigtinio tūrio taikiniu diferencialinis skerspjūvis suskyla į du daugiklius: Rezerfordo formulę atitinkantį diferencialinį skerspjūvį, aprašantį dviejų taškinių krūvininkų sklaidą, ir krūvio formfaktoriaus modulio kvadratą:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R |F(\mathbf{q})|^2 = \frac{\mu^2 e^4 Z_1^2 Z_2^2}{4\hbar^4 k^4} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} |F(\mathbf{q})|^2. \tag{35}$$

Pasiaiškinkime, kaip formfaktoriai pasireiškia sklaidos procese. Pirmiausia reikia pastebėti, kad, jeigu krūvis pasiskirstęs sferiškai simetriškai, tai ir formfaktorius priklauso tiktai nuo perduotojo judėjimo kiekio modulio:

$$\rho(\mathbf{r}) \to \rho(r),$$
$$F(\mathbf{q}) \to F(q) = \frac{4\pi}{Z_2} \frac{1}{q} \int_0^\infty \rho(r) \ \sin(qr) r dr. \tag{36}$$

Iš (35) formulės matyti, kad išsklaidytų dalelių kampiniam pasikirstymui būdinga ašinė simetrija, nes nepriklauso nuo kampo ϕ.

Kai $q = 0$, jeigu $Z_2 \neq 0$, $F(0) = 1$. Įrašius šią reikšmę į (35), matyti, kad, kai $q \to 0$, kas reiškia, kad $\theta \to 0$, sklaidomoji dalelė nejaučia taikinio matmenų. Ji išsklaidoma tarsi taškiniu krūviu. Šitas rezultatas žinomas ir iš klasikinės mechanikos, kai dalelė pralekia tolimais atstumais nuo taikinio, ji nukrypsta mažais kampais ir nejaučia taikinio vidinės strukūros detalių. Didėjant q, formfaktorius $F(\mathbf{q})$ pradžioje mažėja, po to gali pradėti osciliuoti, o, kai $q \gg R$, kur R vidutinis taikinio didumas, formfaktorius sparčiai sunyksta. Taigi, dalelių, išsklaidytų baigtinio didumo krūviu, kampiniam pasiskirstymui visada būdingas didesnis nukrypimas pirmyn, nei sklaidomoms taškiniu krūviu.