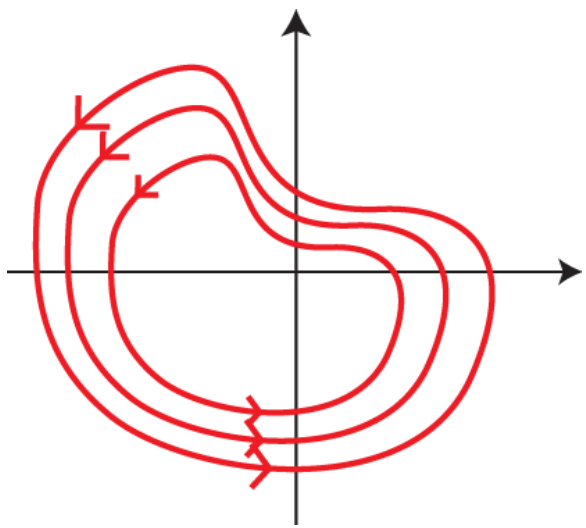
Sinchronizacija ir jos valdymas netiesinių osciliatorių sistemose

Viktor Novičenko

Vilnius | 2016

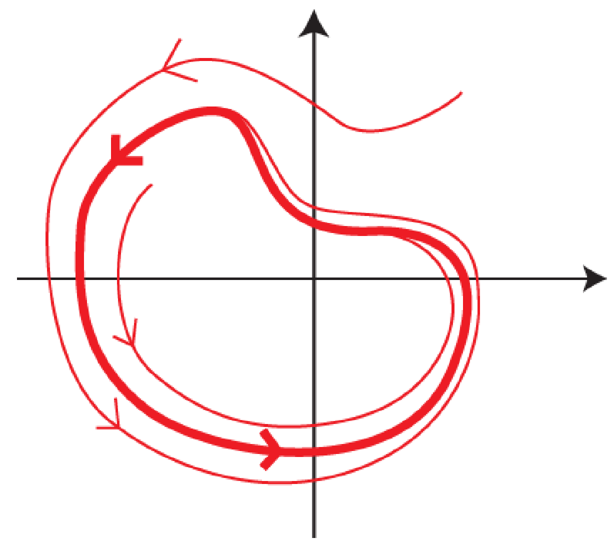
Netiesinis osciliatorius – sistema vaizduojanti periodinį sprendinį, aprašoma netiesinėmis diferencialinėmis lygtimis.
Paprasčiausias pavyzdys yra Žemės-Saulės sistema.

Osciliatoriai konservatyviose sistemose:



Uždaviniai iškyla sprendžiant planetų judėjimą.
Nagrinėjami kelis tūkstantmečius.

Osciliatoriai disipatyviose sistemose:



Sutinkami elektronikoje, robototechnikoje, lazeriuose, cheminėse reakcijose, biologinėse sistemose bei ekonominiuose modeliuose.
Nagrinėjami pastarąjį šimtmetį.

Didelis susidomėjimas ribinio ciklo osciliatoriais yra pastarąjį dvidešimtmetį, pradėjus sparčiai vystytis neuromokslui.

Netiesinės dinamikos moksle dažniausiai stengiamasi „ištiesinti” netiesinę lygtį konkretaus sprendinio aplinkoje.

Už „ištiesinimą” periodinio sprendinio aplinkoje atsako Floke teorija, suformuluota XIX a. pabaigoje.

Tarkim sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ turi periodinį sprendinį $\xi(t) = \xi(t+T)$

Lygtis dėl be galo mažo trikdžio $\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \xi(t)$ yra tiesinė lygtis su periodiniais koeficientais:

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\xi(t))\delta\mathbf{x}$$

$\dot{\mathbf{\Phi}} = D\mathbf{f}(\xi(t))\mathbf{\Phi}$ su pradine sąlyga $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{1}$

Pakanka turėti evoliucijos matricą $\mathbf{\Phi}(t)$ suskaičiuotą per vieną periodą $t \in [0;T]$

$$\delta\mathbf{x}(3.7T) = \mathbf{\Phi}(0.7T)\cdot\mathbf{\Phi}(T)\cdot\mathbf{\Phi}(T)\cdot\mathbf{\Phi}(T)\cdot\delta\mathbf{x}(0)$$

$\mathbf{\Phi}(T)$ - Monodromio matrica

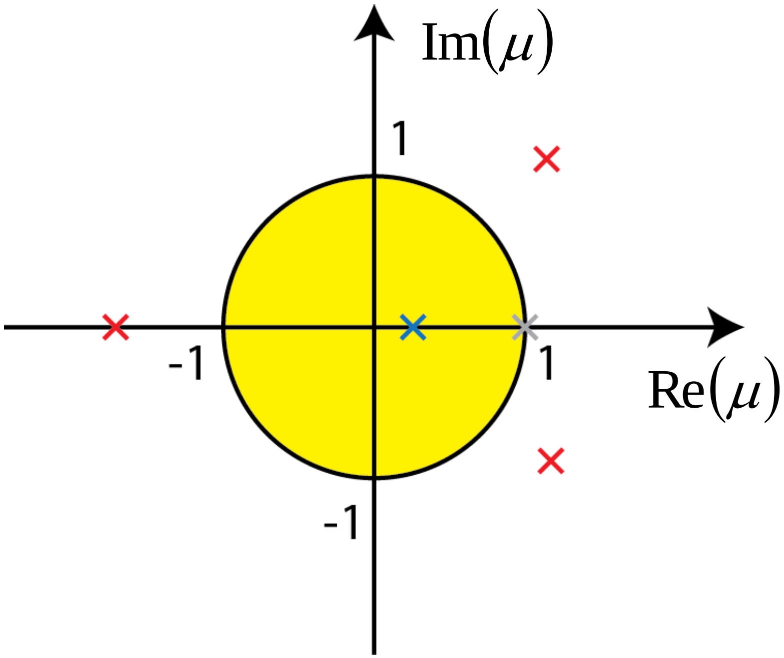
Kas bus su trikdžiu po be galo daug periodu?

$$\lim_{n\to\infty}\left[\mathbf{\Phi}(T)\right]^n \delta\mathbf{x}(0)$$

Monodromio matricos tikrinės vertės (Floke daugikliai) $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ parodo periodinio sprendinio stabilumą.

$$\mu_i = \exp(\lambda_i T)$$

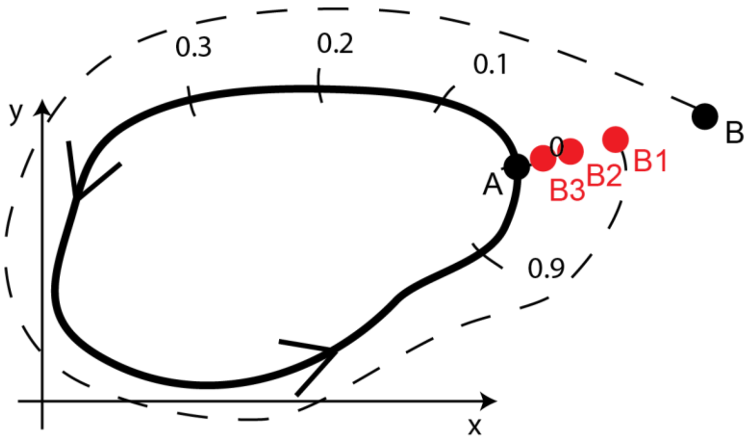
λ_i - Floke eksponentė



Ribinis ciklas yra stabilus, jei
$|\mu_i| < 1$, $i = 2,3\ldots, N$

Fazinė redukcija – teorinės analizės metodas, leidžiantis nagrinėti vieno skaliarinio kintamojo dinamiką, vietoje visų ribinį ciklą aprašančių kintamųjų dinamikos.

Fazinės redukcijos tyrimo objektas: silpnai perturbuotas ribinis ciklas arba osciliatoriai sujungti silpnu ryšiu.

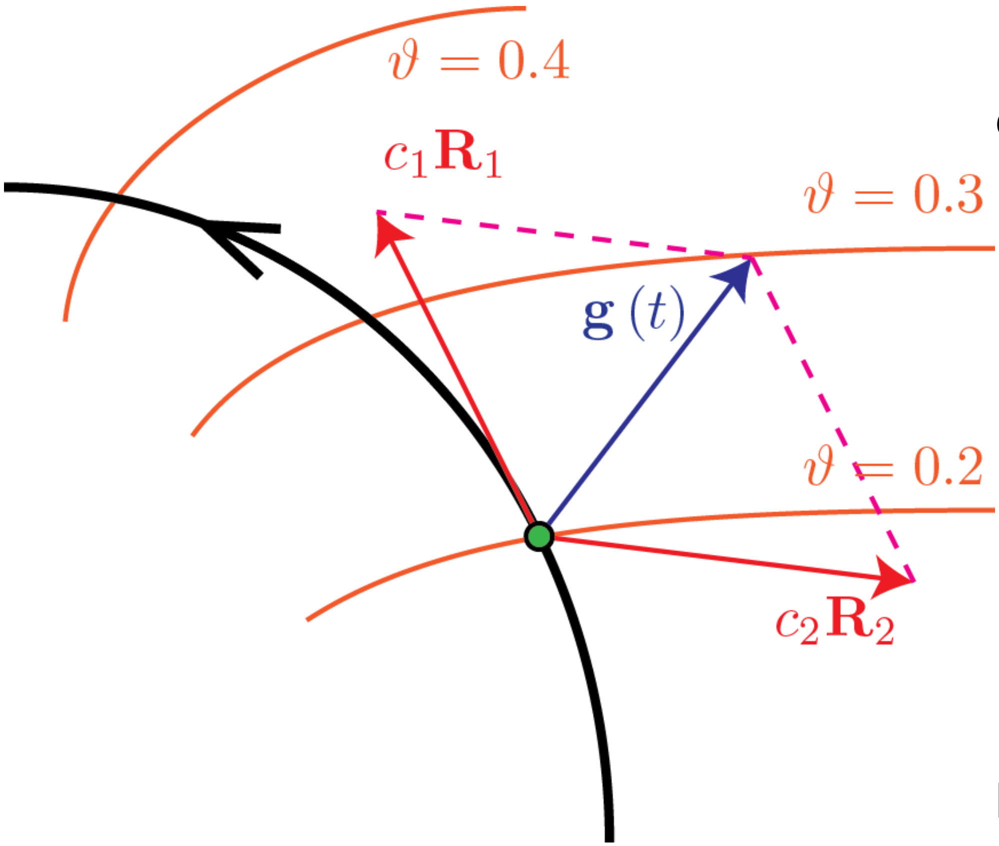


$$\vartheta(\mathbf{x}_B) = \vartheta(\mathbf{x}_{B1}) = \vartheta(\mathbf{x}_{B2}) = \ldots = \vartheta(\boldsymbol{\xi}_A)$$

Fazės dinamika neperturbuotai sistemai: $\dot{\vartheta} = 1$

Silpnai perturbuota sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon\mathbf{g}(t)$

Kaip atrodo perturbuotos sistemos fazės dinamika?



Monodromio matricos $\mathbf{\Phi}(T, \vartheta = 0.2)$
dešinieji tikriniai vektoriai:

$$\mathbf{\Phi}(T, \vartheta = 0.2)\mathbf{R}_i = \mu_i \mathbf{R}_i$$

$$\mathbf{g}(t) = c_1\mathbf{R}_1 + \ldots + c_N\mathbf{R}_N$$

Fazės perturbaciją nulems koeficientas c_1

Monodromio matricos $\mathbf{\Phi}(T, \vartheta = 0.2)$
kairieji tikriniai vektoriai:

$$\mathbf{L}_i\mathbf{\Phi}(T, \vartheta = 0.2) = \mu_i \mathbf{L}_i$$

Dešinieji ir kairieji tikriniai vektoriai yra bi-ortogonalus $\mathbf{L}_i\mathbf{R}_j = \delta_{ij}$
todėl pakanka suskaičiuoti $\mathbf{L}_1\mathbf{g}(t) = c_1$

Fazės atsako funkcija: $\mathbf{L}_1(\vartheta) \equiv \mathbf{z}^T(\vartheta)$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}(t) \;\;\Rightarrow\;\; \dot{\vartheta} = 1 + \varepsilon \mathbf{z}^T(\vartheta)\mathbf{g}(t)$$

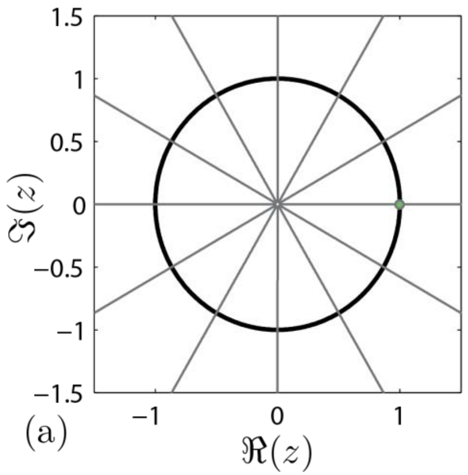
Čia $\mathbf{z}(\vartheta)$ yra periodinė vektorinė funkcija – fazės atsako funkcija (FAF).

FAF yra periodinis sprendinys jungtinės lygties: $\dot{\mathbf{z}} = -[D\mathbf{f}(\xi)]^T \mathbf{z}$

Tenkinantis pradines sąlygas: $\mathbf{z}^T(0) \cdot \dot{\xi}(0) = 1$

Landau-Stuart osciliatorius

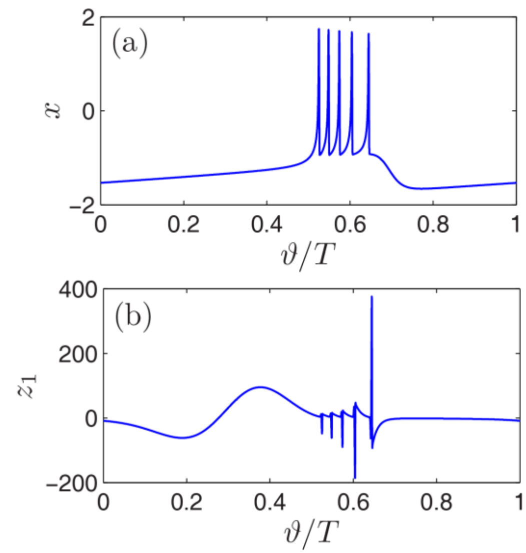
$$\dot{z} = (1+i)z - z|z|^2 \quad \text{kur} \quad z = x + iy$$



$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z}(\vartheta) = \begin{bmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

Hindmarsh-Rose neurono modelis:

$$\dot{x} = y - ax^2 - x^3 - z + I$$
$$\dot{y} = 1 - bx^2 - y$$
$$\dot{z} = r[s(x - x_R) - z]$$



V. Novičenko, K. Pyragas, *Nonlinear. Dyn.* **67**, 517–526 (2012)

Ką galima paskaičiuoti naudojant fazinę redukciją

1) Perturbuoto osciliatoriaus periodą

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}) \;\Rightarrow\; \dot{\vartheta} = 1 + \varepsilon \mathbf{z}^T(\vartheta)\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}(\vartheta)) \;\Rightarrow\; \mathrm{T}_1 = T - \varepsilon \int_0^T \mathbf{z}^T(\vartheta)\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}(\vartheta))\, d\vartheta$$

2) Beveik identiškų osciliatorių, sujungtu silpnu ryšiu, analizė:

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \varepsilon \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k) + \varepsilon \sum_{l \neq k} \mathbf{g}_{kl}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) \;\Rightarrow\; \dot{\vartheta}_k = 1 + \varepsilon \mathbf{z}^T(\vartheta)\left[\mathbf{f}_k(\boldsymbol{\xi}(\vartheta_k)) + \sum_{l \neq k} \mathbf{g}_{kl}(\boldsymbol{\xi}(\vartheta_k), \boldsymbol{\xi}(\vartheta_l))\right]$$

Pašalinam trivialų fazės augimą $\vartheta_k(t) = t + \varphi_k(t)$

$$\dot{\varphi}_k = \varepsilon\left[\omega_k + \sum_l H_{kl}(\varphi_l - \varphi_k)\right]$$

,kur

$$\omega_k = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{z}^T(s)\mathbf{f}_k(\boldsymbol{\xi}(s))\,ds$$

$$H_{kl}(\chi) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{z}^T(s)\mathbf{g}_{kl}(\boldsymbol{\xi}(s), \boldsymbol{\xi}(\chi + s))\,ds$$

3) Sinchronizacija su išoriniu periodiniu signalu $g(t) = g(t + T_1)$ ir optimizacijos uždaviniai:

$$\dot{\vartheta} = 1 + \varepsilon z(\vartheta) g(t) \;\Rightarrow\; \dot{\varphi} = -\Delta f T + \varepsilon H(\varphi) \text{ , kur } \mathrm{H}(\varphi) = \frac{1}{T}\int_0^T z(s + \varphi)\, g(s\, T_1 / T)\,ds$$

$$\varepsilon_{th} = \begin{cases} T\Delta f \,/\, \max[H] & \text{, kai } \Delta f > 0 \\ T\Delta f \,/\, \min[H] & \text{, kai } \Delta f < 0 \end{cases}$$

Fazinę redukcija galima atlikti osciliatoriams aprašomiems lygtimis su delsa:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)\right) + \varepsilon \mathbf{g}(t)$$

Lygtis dėl fazės: $\dot{\vartheta} = 1 + \varepsilon \mathbf{z}^T(\vartheta) \cdot \mathbf{g}(t)$

Jungtinė lygtis FAF rasti: $\dot{\mathbf{z}}^T(t) = -\mathbf{z}^T(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{z}^T(t+\tau)\mathbf{B}(t+\tau)$

čia
$$\mathbf{A}(t) = D_1\mathbf{f}\left(\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\tau)\right)$$
$$\mathbf{B}(t) = D_2\mathbf{f}\left(\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\tau)\right)$$

Pradinės sąlygos: $\mathbf{z}^T(0)\dot{\boldsymbol{\xi}}(0) + \int_{-\tau}^{0} \mathbf{z}^T(\tau+s)\mathbf{B}(\tau+s)\dot{\boldsymbol{\xi}}(s)\,ds = 1$

$$\underbrace{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})}_{\text{Laisvo osciliatoriaus dinamika}} + \underbrace{\mathbf{K}\left[\mathbf{x}(t-T) - \mathbf{x}(t)\right]}_{\text{Uždelsto grįžtamojo ryšio jėga}}$$

Laisvo osciliatoriaus dinamika

Uždelsto grįžtamojo ryšio jėga

$$\mathbf{A}(t) = D\mathbf{f}\left(\boldsymbol{\xi}(t)\right) - \mathbf{K}$$
$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{K}$$

FAF tenkina jungtinę lygtį:

$$\dot{\mathbf{z}}^T = -\mathbf{z}^T D\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi})$$

$\boxed{\text{FAF forma nepriklauso nuo valdymo matricos } \mathbf{K}}$

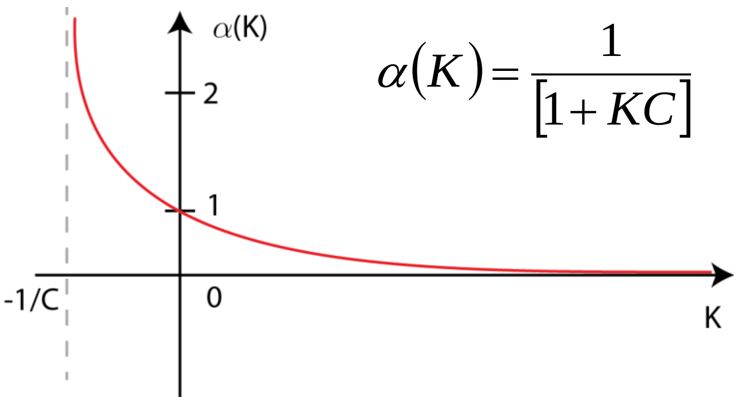
V. Novičenko, K. Pyragas, *Physica D* **241**, 1090–1098 (2012)
K. Kotani et al, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 044101 (2012)

Sinchronizacijos valdymas silpnai sujungtų osciliatorių tinkle, naudojant uždelsto grįžtamojo ryšio jėgą

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \varepsilon \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) + \varepsilon \sum_j a_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \mathbf{K}[\mathbf{x}_i(t-\tau_i) - \mathbf{x}_i(t)]$$

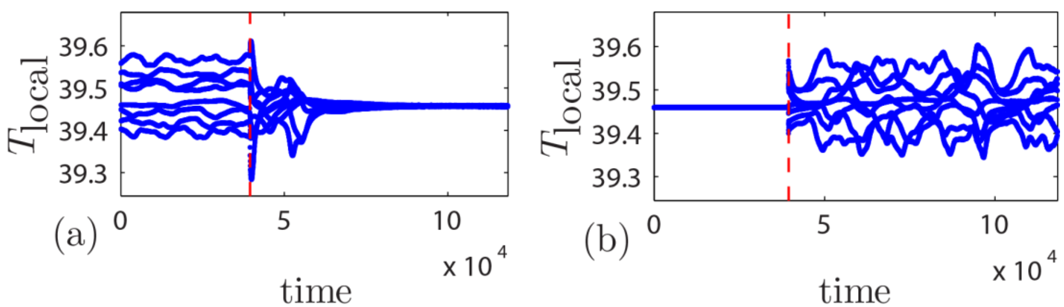
$$\Downarrow$$

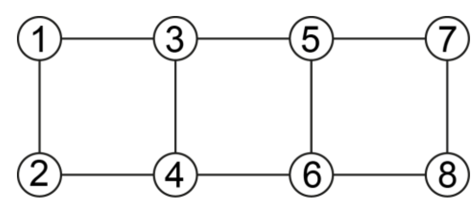
$$\dot{\varphi}_i = \omega_i^{\mathrm{eff}} + \varepsilon^{\mathrm{eff}} \sum_j a_{ij} h(\varphi_j - \varphi_i)\,, \quad \text{kur} \quad \varepsilon^{\mathrm{eff}} = \varepsilon \alpha(\mathbf{K}) \quad \text{ir} \quad \omega_i^{\mathrm{eff}} = \omega_i + \Omega \frac{\tau_i - T_i}{T}[\alpha(\mathbf{K}) - 1]$$



$$\alpha(K) = \frac{1}{[1+KC]}$$

FitzHugh-Nagumo neuronų tinklas





V. Novičenko, *Phys. Rev. E* **92**, 022919 (2015)

Kartais reikia, kad ne vien dažniai bet ir fazės būtų vienodos:

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i^{\text{eff}} + \varepsilon^{\text{eff}} \sum_j a_{ij} h\left(\varphi_j - \varphi_i\right)$$

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \ldots = \varphi_n(t) = \varphi = \text{const}$$

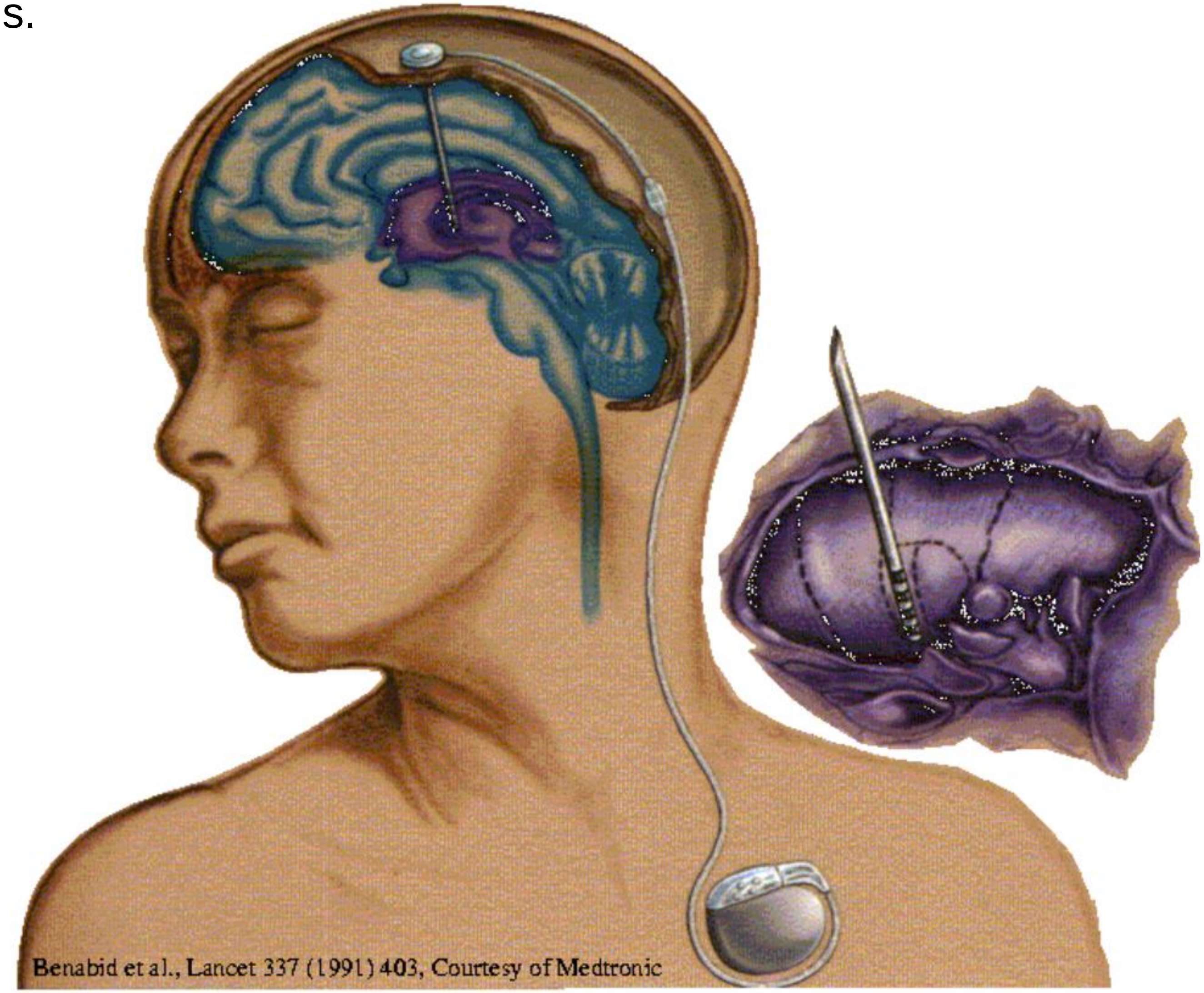
$$\frac{\tau_i - T_i}{T} = \frac{\omega_i}{\Omega\left[1-\alpha(\mathbf{K})\right]} \Rightarrow \omega_i^{\text{eff}} = \omega_i + \Omega \frac{\tau_i - T_i}{T}\left[\alpha(\mathbf{K}) - 1\right] = 0$$

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) - \varphi \\ \vdots \\ \varphi_n(t) - \varphi \end{pmatrix} \qquad \delta\dot{\boldsymbol{\varphi}} = -\varepsilon^{\text{eff}} h'(0)\mathbf{L}\delta\boldsymbol{\varphi}$$

Jei $h'(0) > 0$, tai sprendinys $\delta\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$ prie bet kokios tinklo topologijos yra stabilus.

V. Novičenko, *Phys. Rev. E* **92**, 022919 (2015)

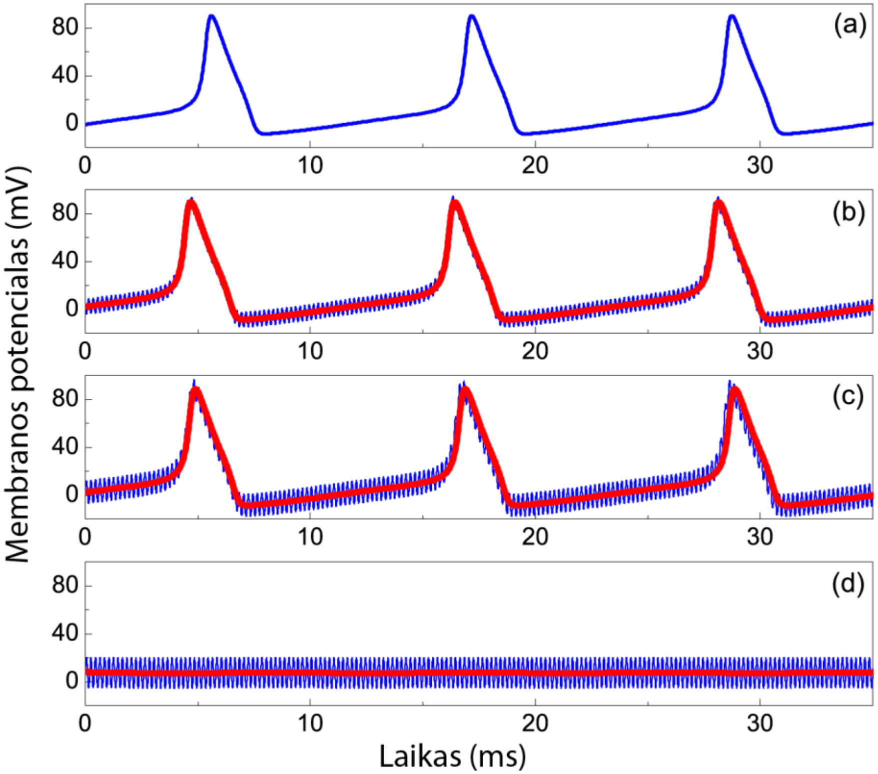
Giluminė smegenų stimuliacija (deep brain stimulation) – procedūrą taikoma Parkinsono liga sergantiems žmonėms, kai tam tikra smegenų sritis stimuliuojama aukšto dažnio (120-180 Hz) elektros srove. Ji taikoma tada, kai nepavyksta sumažinti raumenų nevalingus judesius naudojant cheminius preparatus.



$$\dot{v} = f(v, \mathbf{w}) + I_1 \cos(\omega t)$$
$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{g}(v, \mathbf{w})$$

Mes nagrinėjame atvejį, kai stimuliavimo srovės amplitudė tiesiškai priklauso nuo dažnio: $I_1 = A\omega$

Vidurkinta dinamika aprašoma: $$\dot{\bar{v}} = \langle f(\bar{v} + A\sin\tau, \bar{\mathbf{w}}) \rangle_\tau = f_1(\bar{v}, \bar{\mathbf{w}}, A)$$
$$\dot{\bar{\mathbf{w}}} = \langle \mathbf{g}(\bar{v} + A\sin\tau, \bar{\mathbf{w}}) \rangle_\tau = \mathbf{g}_1(\bar{v}, \bar{\mathbf{w}}, A)$$



$I_1 = 0$

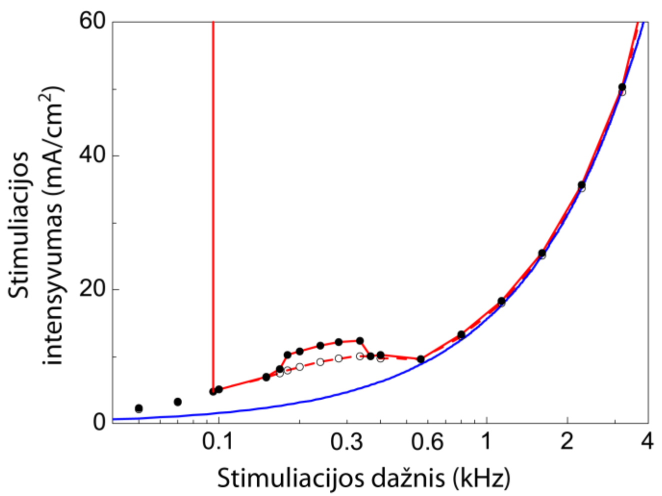
$I_1 = 200 \quad \mu A / cm^2$

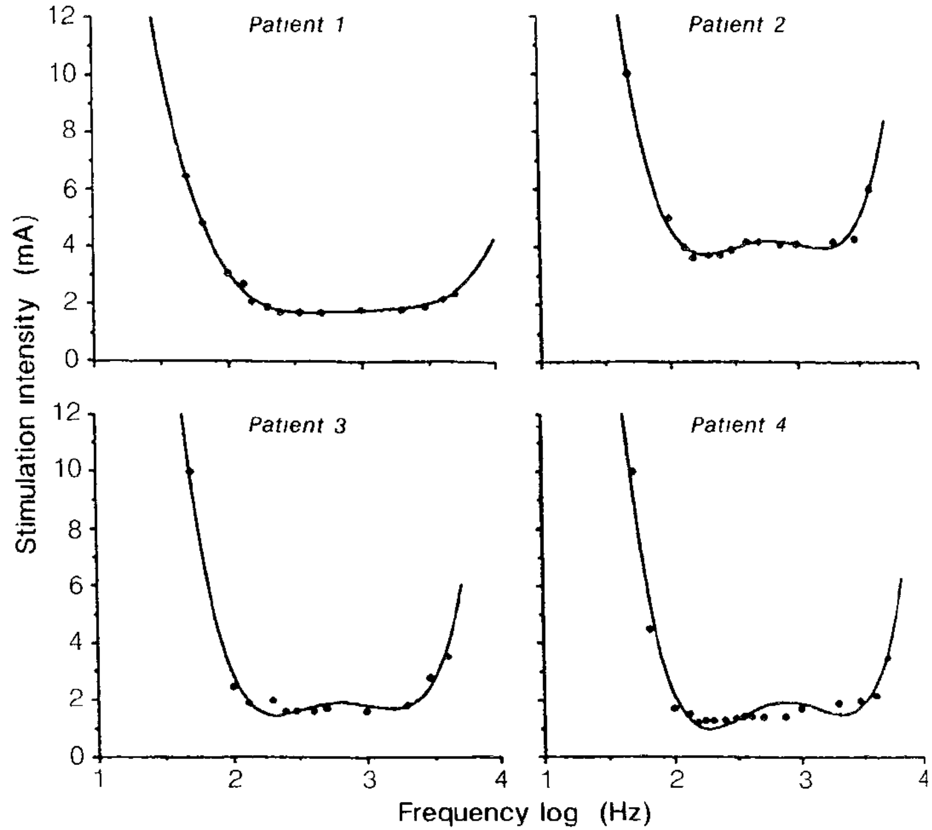
$I_1 = 300 \quad \mu A / cm^2$

$I_1 = 400 \quad \mu A / cm^2$

K. Pyragas, V. Novičenko, P. A. Tass, *Biol. Cyber.* **107**, 669-684 (2013)

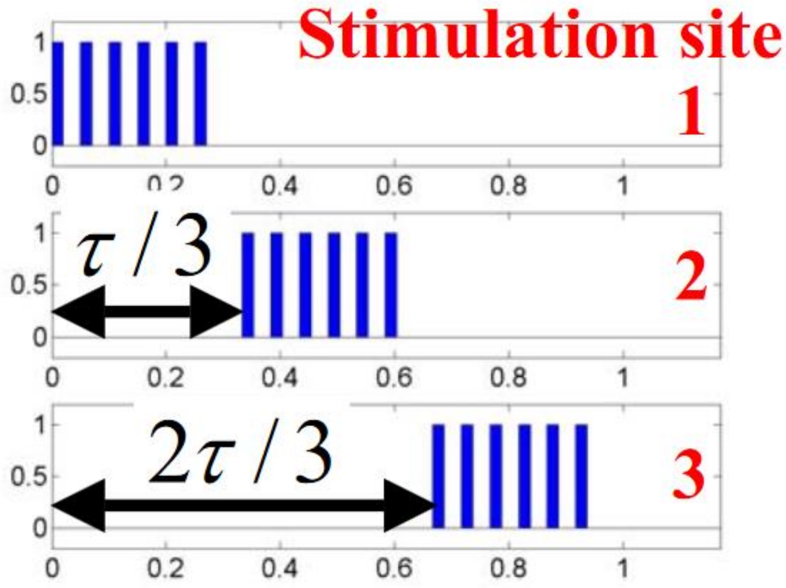
Benabid AL et al, *Lancet* **337** 403 (1991)





K. Pyragas, V. Novičenko, P. A. Tass, *Biol. Cyber.* **107**, 669-684 (2013)

Stimuliuojant skirtingus neuronų pogrupius su pastumtomis laike gaubtinėmis galima sumažinti bendrą neuronų kuriamą vidutinį lauką



Fazinė redukcija osciliatoriams perturbuotiems stipria aukšto dažnio jėga su lėtai kintančia gaubtine

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + K\psi(\Omega t)\varphi(\omega t) \qquad \omega \to +\infty \qquad K = A\omega$$

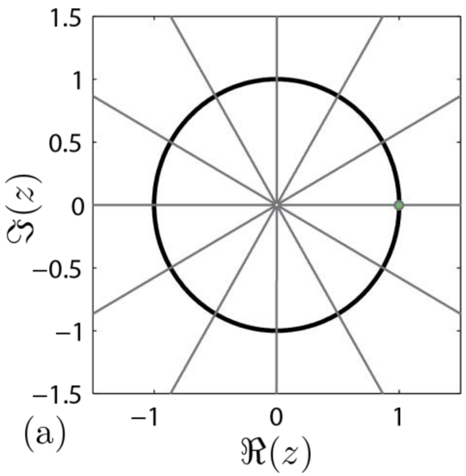
Įvedam naują kintamąjį $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - A\Phi(\omega t)\psi(\Omega t)$

Lygtis $\mathbf{y}(t)$ suvidurkintam per aukšto dažnio periodą yra:

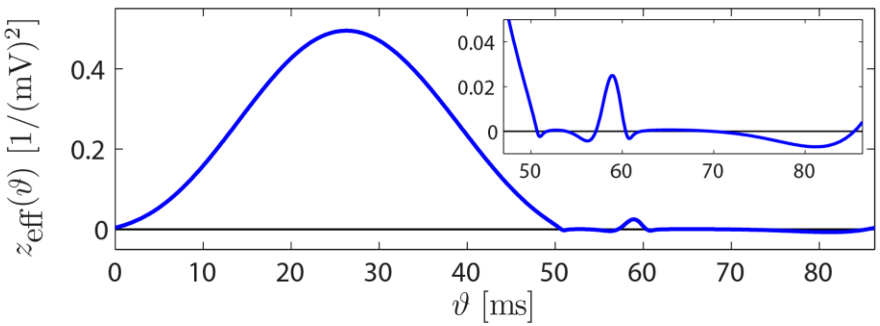
$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \frac{\langle \Phi^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{y})}{\partial y_1^2} A^2 \psi^2(\Omega t) \;\Rightarrow\; \dot{\vartheta} = 1 + \frac{\langle \Phi^2 \rangle}{2} A^2 z_{\text{eff}}(\vartheta)\psi^2(\Omega t) \text{, kur } z_{\text{eff}}(\vartheta) = \mathbf{z}^{\mathrm{T}}(\vartheta) \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\xi(\vartheta))}{\partial \xi_1^2}$$

Efektyvinė FAF Landau-Stuart osciliatoriui:

$$z_{\text{eff}}(\vartheta) = 2\sin(2\vartheta)$$



Efektyvinė FAF Morris-Lecar neuronui:



K. Pyragas, V. Novičenko, *Phys. Rev. E* **92**, 012910 (2015)

Optimizacijos uždaviniai su ribojimais (parkavimo uždavinys)

$$\dot{x} = v \qquad \dot{v} = u(t) \qquad u \in [-a, b]$$

Kraštinės sąlygos $x(0) = 0, \quad x(T) = A$; $v(0) = 0, \quad v(T) = 0$

Norime minimizuoti laiką T

Sistemos Hamiltonianas

$$H(p_1, p_2, x, v, u) = p_1 v + p_2 u - 1$$

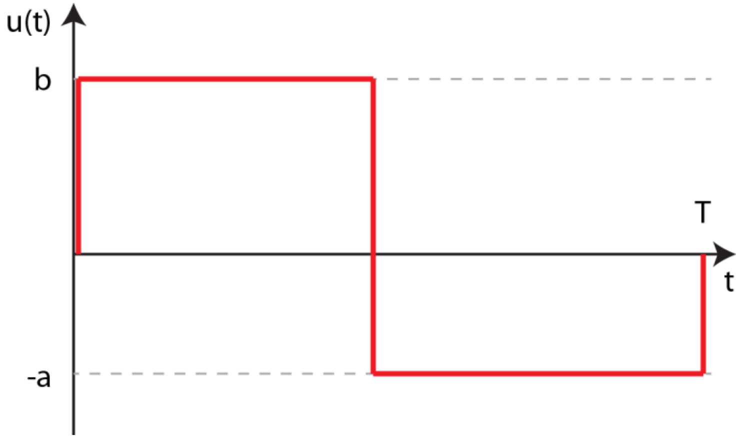
Lygtis dėl jungtinių kintamųjų

$$\dot{p}_1 = -\partial H/\partial x = 0$$
$$\dot{p}_2 = -\partial H/\partial v = -p_1$$

Jei spręstume be ribojimų, tai ant optimalios trajektorijos $\frac{dH}{du} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 0$

Negauname jokios informacijos apie optimalius $u^*(t)$, $x^*(t)$ ir $v^*(t)$

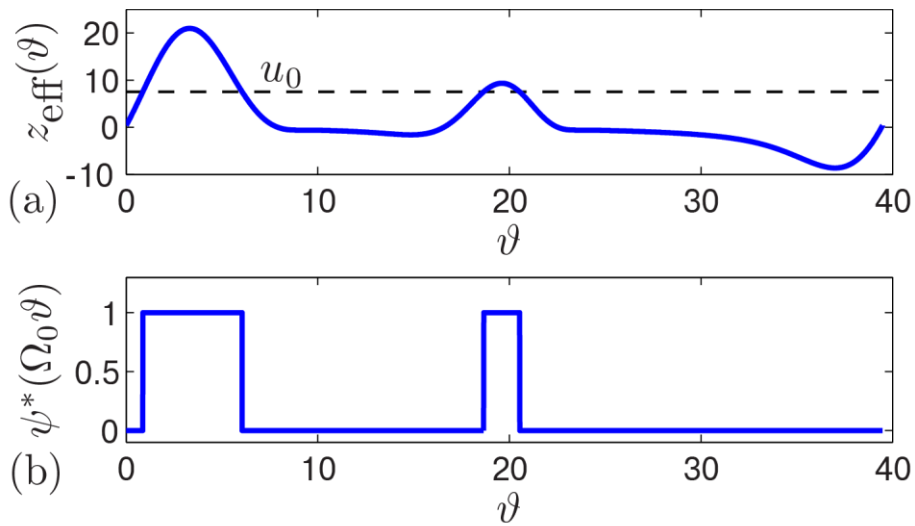
Pontriagino maksimumo principas – ant optimalios trajektorijos Hamiltonianas pasiekia maksimalią įmanomą vertę, net tada kai $u \in [-a, b]$



Optimali gaubtinės forma norint pasiekti sinchronizaciją minimalia galia

$$H = p + A^2\psi^2\left[\frac{\langle\Phi^2\rangle}{2} z_{\mathrm{eff}}(\vartheta)p - \frac{\omega^2}{T}\right] \qquad \frac{dH}{d\psi} = 0 \quad \text{duos} \quad \psi(t) = 0$$

Optimali gaubtinės forma FitzHugh-Nagumo neuronui



K. Pyragas, V. Novičenko, *Phys. Rev. E* **92**, 012910 (2015)

PABAIGA