

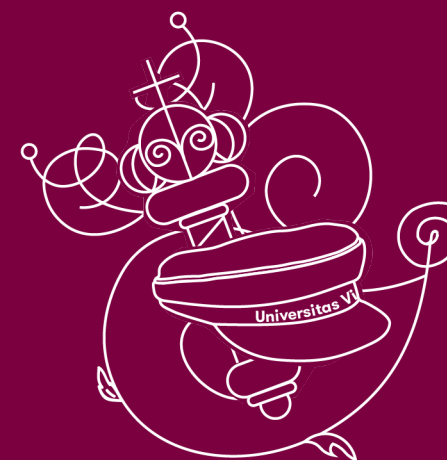
# Ribinio ciklo osciliatoriai, sinchronizacija ir jos valdymas

Viktor Novičenko

Gruodis 2023, Vilnius



**Vilnius  
University**



# Autonominės ir neautonominės netiesinės dinaminės sistemos

Dinaminės sistemos aprašomos paprastomis diferencialinėmis lygtimis

Neautonominė sistema:

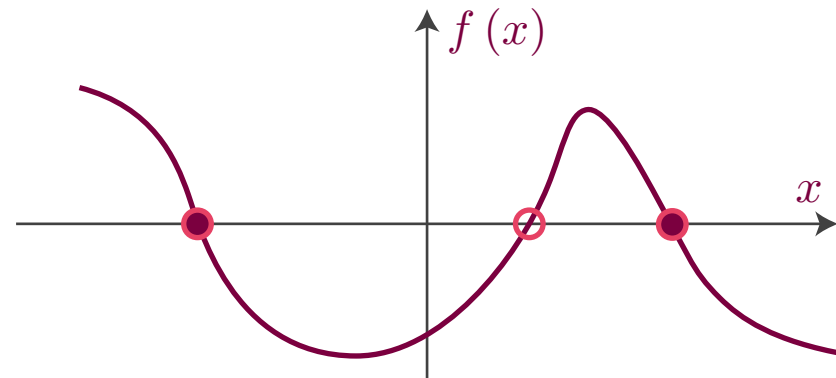
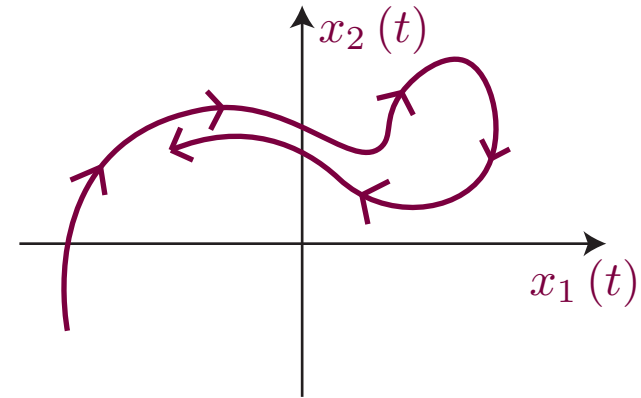
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$$

Autonominė sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

Vienmatė autonominė sistema ir jos rimties taškai:

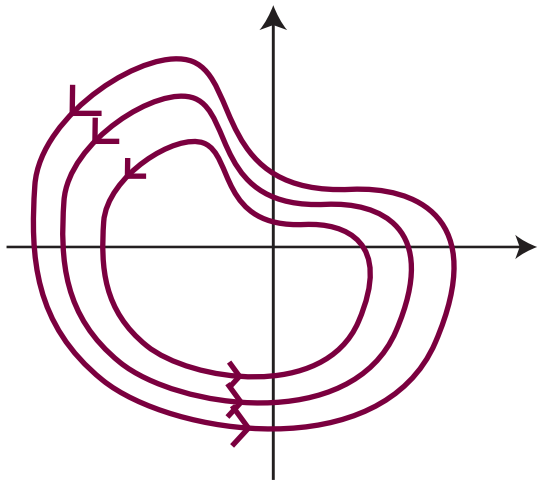
$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$



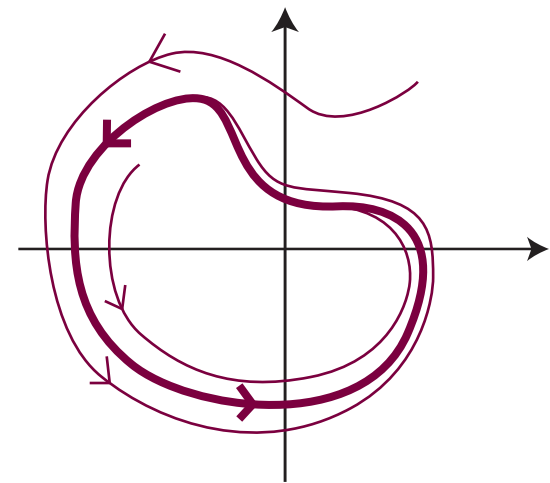
# Netiesiniai osciliatoriai

Netiesinis osciliatorius - dinaminė sistema turinti periodinį sprendinį ir aprašoma netiesinėmis diferencialinėmis lygtimis. Paprasčiausias pavyzdys yra Žemės-Saulės sistema.

Osciliatoriai konservatyviose sistemose



Osciliatoriai disipatyviose sistemose



Uždaviniai iškyla sprendžiant planetų judėjimą.  
Nagrinėjami kelis tūkstantmečius.

Sutinkami elektronikoje, robototeknikoje, lazeriuose, cheminėse reakcijose, biologinėse sistemose bei ekonominiuose modeliuose.  
Nagrinėjami pastarąjį šimtmetį.

# Lygčių “ištiesinimas” konkretaus sprendinio aplinkoje

Už “ištiesinimą” periodinio sprendinio aplinkoje atsako Floke teorija, suformuluota XIX a. pabaigoje.

Tarkime autoniminė sistema  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  turi periodinį sprendinį  $\boldsymbol{\xi}(t+T) = \boldsymbol{\xi}(t)$

Lygtis dėl be galo mažo trikdžio  $\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\xi}(t)$  yra tiesinė lygtis su periodiniais koeficientais:

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = D\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t)) \delta\mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\Phi}(t) = D\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t)) \Phi(t) \quad \text{su pradine sąlyga} \quad \Phi(0) = \mathbf{1}$$

Pakanka turėti evoliucijos matricą  $\Phi(t)$  suskaičiuotą per vieną periodą  $t \in [0; T]$

$$\delta\mathbf{x}(3.7T) = \Phi(0.7T) \Phi(T) \Phi(T) \Phi(T) \delta\mathbf{x}(0)$$

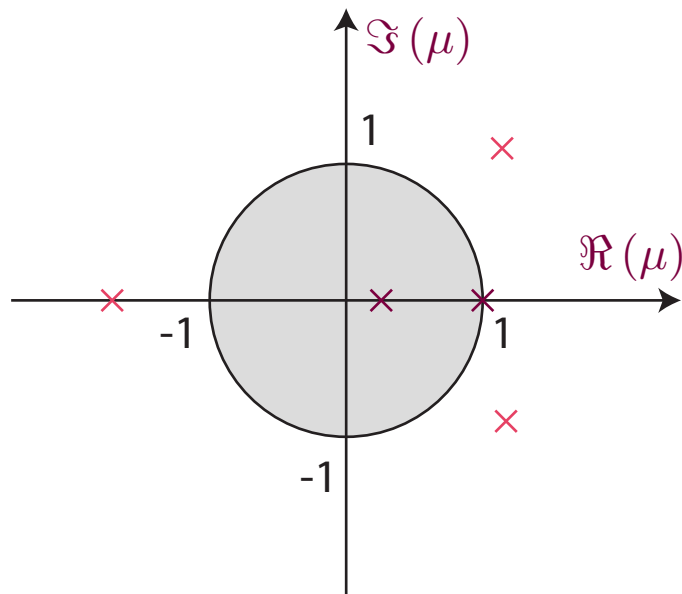
$\Phi(T)$  - monodromio matrica

# Trikdžiai po be galo daug periodų

Kas bus su trikdžiu po be galo daug periodų?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [\Phi(T)]^n \delta \mathbf{x}(0)$$

Monodromio matricos tikrinės vertės (Floke daugikliai)  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$  parodo periodinio sprendinio stabilumą.



$$\mu_i = \exp(\lambda_i T)$$

$\lambda_i$  - Floke eksponentė

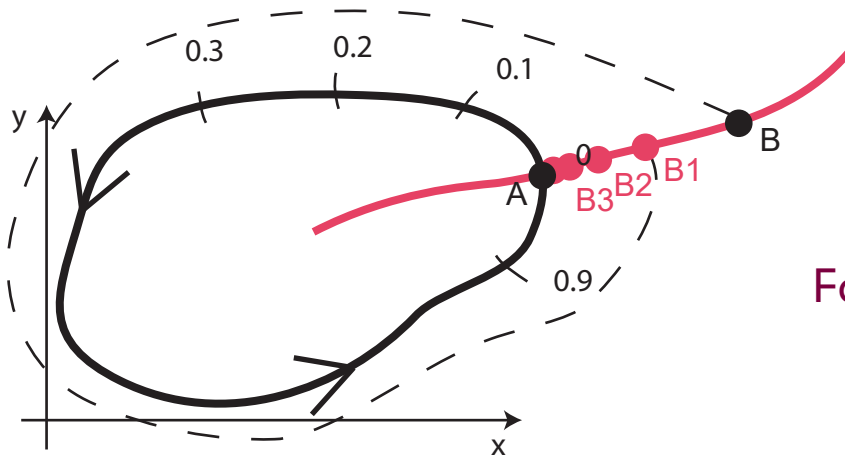
Ribinis ciklas yra stabilus, jei

$$|\mu_i| < 1, \quad i = 2, 3, \dots, N$$

# Fazinė redukcija

Fazinė redukcija - teorinės analizės metodas leidžiantis nagrinėti vieno skaliarinio kintamojo dinamiką vietoje visų ribinį ciklą aprašančių kintamųjų dinamikos.

Fazinės redukcijos tyrimo objektas: silpnai perturbuotas ribinis ciklas arba ribinio ciklo osciliatoriai sujungti silpnu ryšiu.



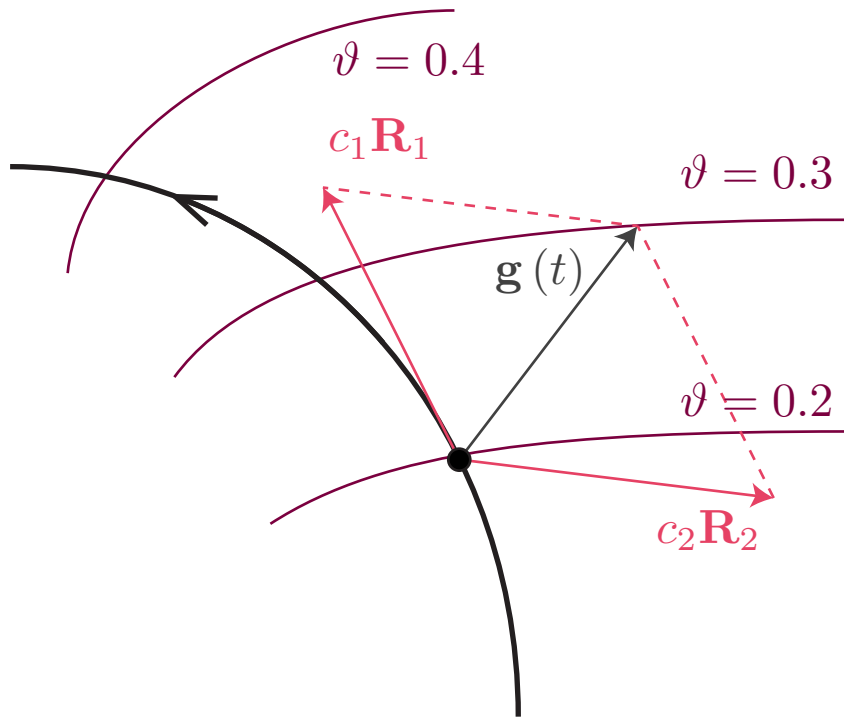
$$\vartheta(\mathbf{x}_B) = \vartheta(\mathbf{x}_{B1}) = \vartheta(\mathbf{x}_{B2}) = \dots = \vartheta(\xi_A)$$

Fazės dinamika neperturbuotai sistemai:  $\dot{\vartheta}(t) = 1$

Silpnai perturbuota sistema  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \varepsilon \mathbf{g}(t)$

Kaip atrodo perturbuotos sistemos fazės dinamika?

# Perturbuotos sistemos fazės dinamika



Monodromio matricos  $\Phi(T, \vartheta = 0.2)$  dešinieji tikriniai vektoriai:

$$\Phi(T, \vartheta = 0.2) \mathbf{R}_i = \mu_i \mathbf{R}_i$$

$$\mathbf{g}(t) = c_1 \mathbf{R}_1 + c_2 \mathbf{R}_2 + \dots + c_N \mathbf{R}_N$$

Fazės perturbaciją nulems koeficientas  $c_1$

Monodromio matricos  $\Phi(T, \vartheta = 0.2)$  kairieji tikriniai vektoriai:

$$\mathbf{L}_i \Phi(T, \vartheta = 0.2) = \mu_i \mathbf{L}_i$$

Dešinieji ir kairieji tikriniai vektoriai yra bi-ortogonalūs,  $\mathbf{L}_i \mathbf{R}_j = \delta_{ij}$ , todėl pakanka skaičiuoti  $\mathbf{L}_1 \mathbf{g}(t) = c_1$

Fazės atsako funkcija:  $\mathbf{L}_1(\vartheta) = \mathbf{z}^T(\vartheta)$

# Fazės atsako funkcija

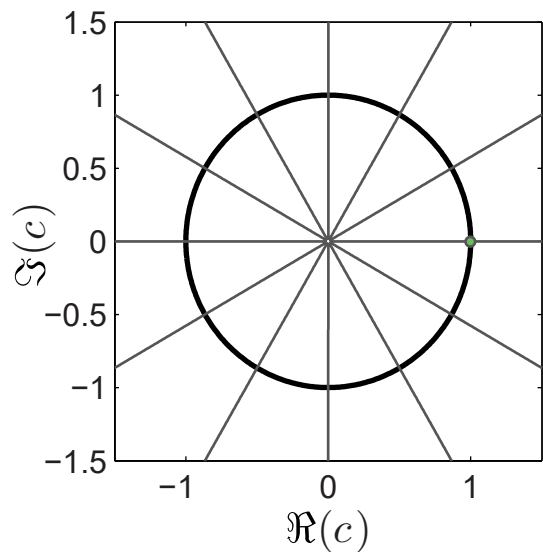
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \varepsilon \mathbf{g}(t) \implies \dot{\vartheta}(t) = 1 + \varepsilon \mathbf{z}^T(\vartheta(t)) \cdot \mathbf{g}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Čia  $\mathbf{z}(\vartheta)$  yra periodinė vektorinė funkcija - fazės atsako funkcija (FAF)

FAF yra periodinis sprendinys jungtinės lygties  $\dot{\mathbf{z}}(t) = -[D\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t))]^T \mathbf{z}(t)$  tenkinantis pradines sąlygas:  $\mathbf{z}^T(0) \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}(0) = 1$

Landau-Stuart osciliatorius

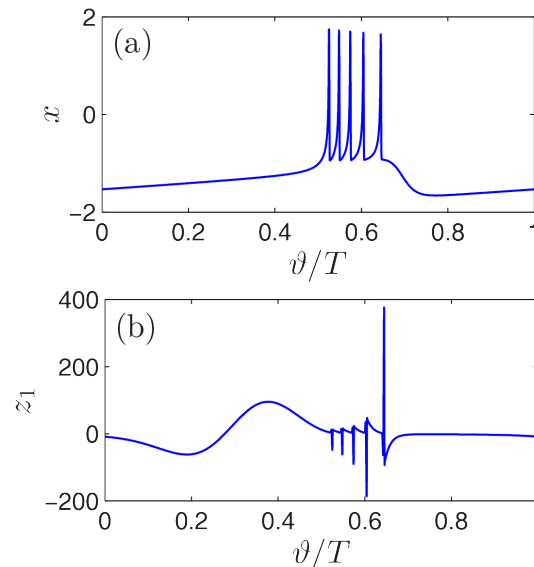
$$\dot{c}(t) = (1 + i)c(t) - c(t)|c(t)|^2 \quad c = x + iy$$



$$\boldsymbol{\xi}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \mathbf{z}(\vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Hindmarsh-Rose neurono modelis

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) - ax^2(t) - x^3(t) - w(t) + I \\ \dot{y}(t) &= 1 - bx^2(t) - y(t) \\ \dot{w}(t) &= r[s(x(t) - x_R) - w(t)] \end{aligned}$$



V. Noviĉenko, K. Pyragas, *Nonlinear. Dyn.* **67**, 517–526 (2012)



# Ką galima paskaičiuoti naudojant fazinę redukciją?

1) perturbuoto osciliatoriaus periodas

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}) \implies \dot{\vartheta} = 1 + \varepsilon \mathbf{z}^T(\vartheta) \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}(\vartheta)) \implies T_1 = T - \varepsilon \int_0^T \mathbf{z}^T(\vartheta) \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}(\vartheta)) d\vartheta$$

2) beveik identiškų osciliatorių, sujungtu silpnu ryšiu, analizė:

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \varepsilon \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k) + \varepsilon \sum_{l \neq k} \mathbf{g}_{kl}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) \implies \dot{\vartheta}_k = 1 + \varepsilon \mathbf{z}^T(\vartheta_k) \left[ \mathbf{f}_k(\boldsymbol{\xi}(\vartheta_k)) + \sum_{l \neq k} \mathbf{g}_{kl}(\boldsymbol{\xi}(\vartheta_k), \boldsymbol{\xi}(\vartheta_l)) \right]$$

Pašalinam trivialų fazės augimą  $\vartheta_k(t) = t + \varphi_k(t)$

$$\dot{\varphi}_k = \varepsilon \left[ \omega_k + \sum_{l \neq k} H_{kl}(\varphi_l - \varphi_k) \right], \text{ kur} \quad \omega_k = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{z}^T(s) \mathbf{f}_k(\boldsymbol{\xi}(s)) ds$$
$$H_{kl}(\chi) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{z}^T(s) \mathbf{g}_{kl}(\boldsymbol{\xi}(s), \boldsymbol{\xi}(s + \chi)) ds$$

3) sinchronizacija su išoriniu periodiniu signalu  $g(t) = g(t + T_1)$  ir optimizacijos uždaviniai:

$$\dot{\vartheta} = 1 + \varepsilon z(\vartheta) g(t) \implies \dot{\varphi} = -\Delta f T + \varepsilon H(\varphi), \text{ kur} \quad H(\varphi) = \frac{1}{T} \int_0^T z(s + \varphi) g\left(s \frac{T_1}{T}\right) ds$$
$$\varepsilon_{\text{th}} = \begin{cases} T \Delta f / \max[H] & , \text{ kai } \Delta f > 0 \\ T \Delta f / \max[H] & , \text{ kai } \Delta f < 0 \end{cases}$$

# Fazinė redukcija osciliatoriams aprašomiems lygtimis su delsa

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)) + \varepsilon \mathbf{g}(t)$$

Lygtis dėl fazės:  $\dot{\vartheta}(t) = 1 + \varepsilon \mathbf{z}^T(\vartheta(t)) \cdot \mathbf{g}(t)$

Jungtinė lygtis FAF rasti:  $\dot{\mathbf{z}}^T(t) = -\mathbf{z}^T(t) \mathbf{A}(t) - \mathbf{z}^T(t + \tau) \mathbf{B}(t + \tau)$

čia  $\mathbf{A}(t) = D_1 \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t - \tau))$

$$\mathbf{B}(t) = D_2 \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t - \tau))$$

Pradinės sąlygos:  $\mathbf{z}^T(0) \dot{\boldsymbol{\xi}}(0) + \int_{-\tau}^0 \mathbf{z}^T(\tau + s) \mathbf{B}(\tau + s) \dot{\boldsymbol{\xi}}(s) ds = 1$

$$\underbrace{\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))}_{\text{Laisvo osciliatoriaus dinamika}} + \underbrace{\mathbf{K} [\mathbf{x}(t - T) - \mathbf{x}(t)]}_{\text{Uždelsto grįžtamojo ryšio jėga}}$$

Laisvo osciliatoriaus  
dinamika

Uždelsto grįžtamojo  
ryšio jėga

$$\mathbf{A}(t) = D\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t)) - \mathbf{K}$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{K}$$

FAF tenkina jungtinę lygtį:

$$\dot{\mathbf{z}}^T(t) = -\mathbf{z}^T(t) D\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t))$$

FAF nepriklauso nuo valdymo matricos  $\mathbf{K}$

V. Novičenko, K. Pyragas, *Physica D* **241**, 1090–1098 (2012)

K. Kotani et al, *Phys Rev. Lett.* **109**, 044101 (2012)

# Sinchronizacijos valdymas silpnai sujungtų osciliatorių tinkle

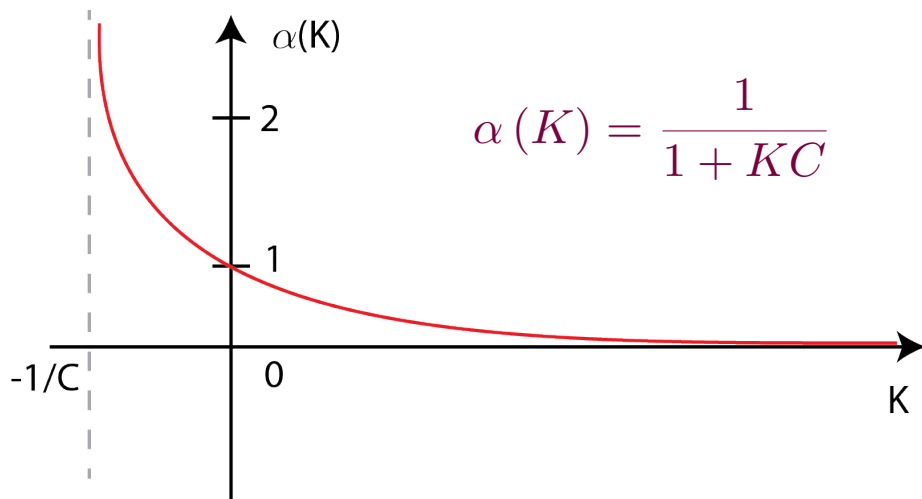
$$\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t), u_k(t)) + \varepsilon \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k(t)) + \varepsilon \sum_{l \neq k} a_{kl} \mathbf{g}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{x}_l(t))$$

$$s_k(t) = G(\mathbf{x}_k(t))$$

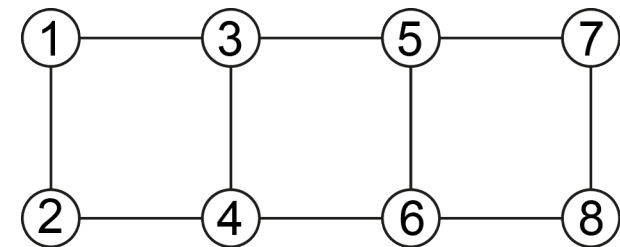
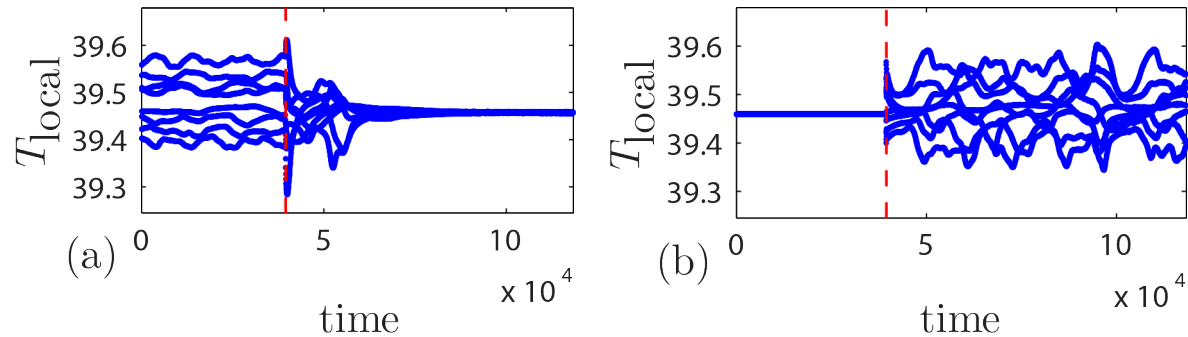
$$u_k(t) = K[s_k(t - \tau_k) - s_k(t)]$$



$$\dot{\varphi}_k = \omega_k^{\text{eff}} + \varepsilon^{\text{eff}} \sum_{l \neq k} a_{kl} H(\varphi_l - \varphi_k), \text{ kur } \varepsilon^{\text{eff}} = \varepsilon \alpha(K) \text{ ir } \omega_k^{\text{eff}} = \omega_k + \Omega \frac{\tau_k - T_k}{T} [\alpha(K) - 1]$$



## FitzHugh-Nagumo neuronų tinklas



V. Novičenko, Phys. Rev. E **92**, 022919 (2015)

# Sin-fazinės sinchronizacijos valdymas naudojant adaptyvias delsas

Pagrindinė idėja:

- sukonstruoti potencialą  $V \geq 0$  kuris tampa lygus nuliui kai osciliatorių tinklas yra ant sin-fazinės sinchronizacijos būsenos ir teigiamas kai tinklas yra kitose būsenose

- panaudoti gradientinį nusileidimo metodą delsomis judinti  $\dot{\tau}_k(t) = -\frac{\partial V}{\partial \tau_k}$

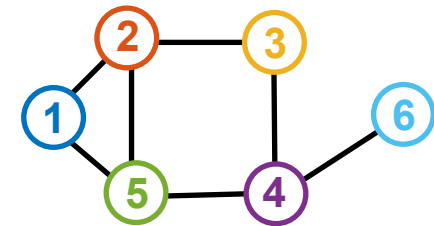
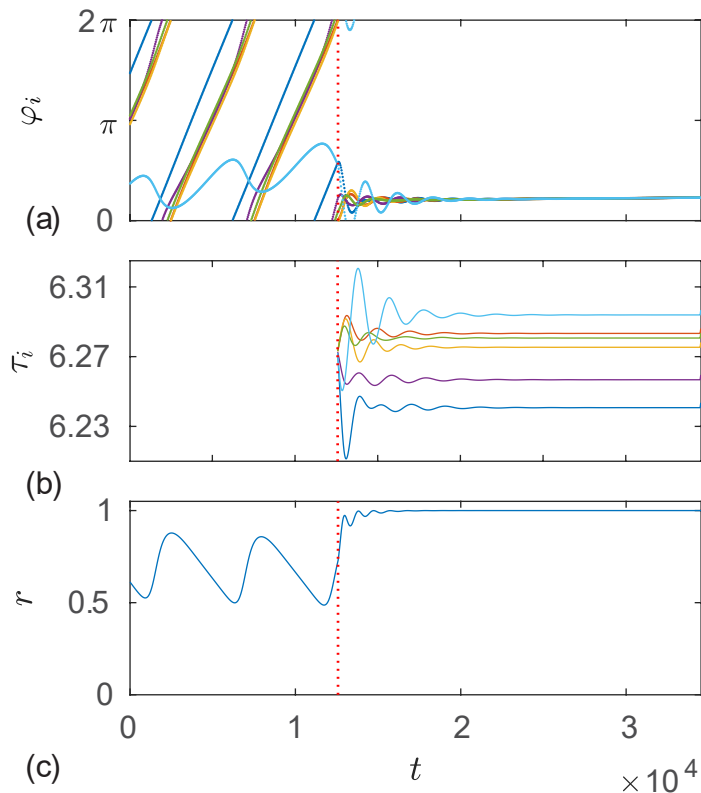
potencialas sin-fazinei sinchronizacijai

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n a_{kl} [s_k(t) - s_l(t)]^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau_k} = \Omega^{-1} \sum_{l,m=1}^n a_{lm} [s_m(t) - s_l(t)] \left[ \dot{s}_m(t) \frac{\partial \varphi_m}{\partial \tau_k} - \dot{s}_l(t) \frac{\partial \varphi_l}{\partial \tau_k} \right]$$

$$\frac{\partial \varphi_l}{\partial \tau_k} \sim (\mathbf{L}^\dagger)_{lk}, \text{ kur tinklo Laplaso matrica } \mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$$

$$r = \frac{1}{6} \left| \sum_{i=1}^6 \exp(i\varphi_i) \right|$$



V. Noviĉenko, I. Ratas, Phys. Rev. E **98**, 042302 (2018)

# Sąveikos ženkle apvertimas

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, u_1) + \varepsilon g_{12}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2, u_2) + \varepsilon g_{21}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

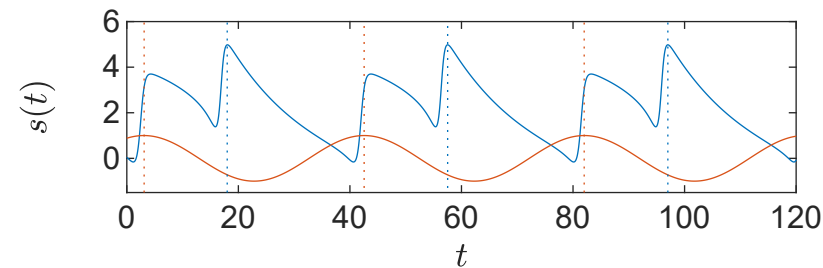
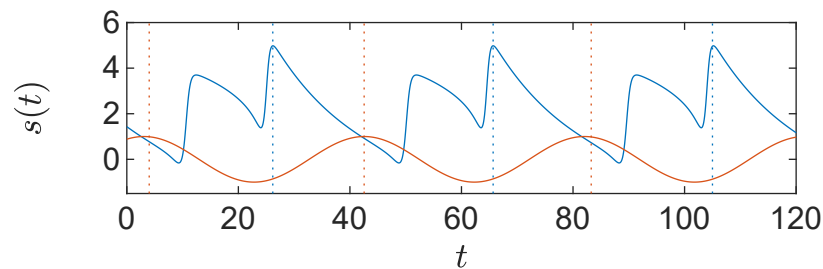
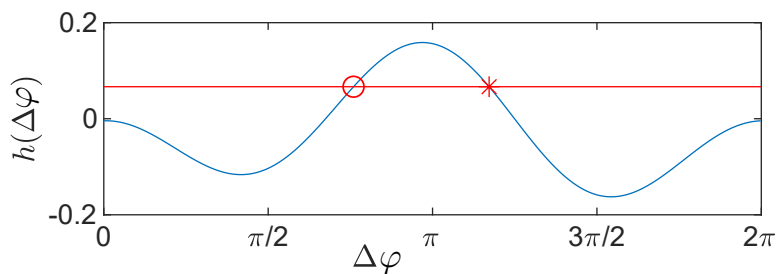


$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 + \varepsilon H_{12}(\varphi_2 - \varphi_1)$$

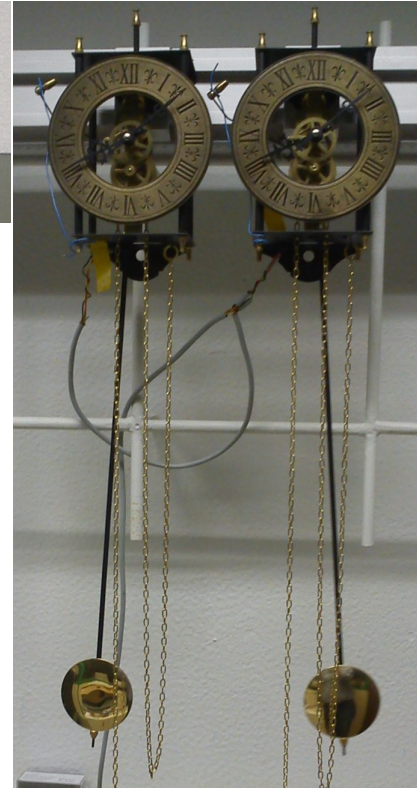
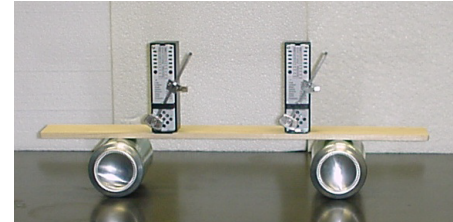
$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2 + \varepsilon H_{21}(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{jvedam} \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$



$$\Delta\dot{\varphi} = \omega_2 - \omega_1 + \varepsilon h(\Delta\varphi), \quad \text{kur} \quad h(\Delta\varphi) = H_{21}(\Delta\varphi) - H_{12}(\Delta\varphi)$$



Metronomai ant padėklo ir Hiuigenso švytuokliai laikrodžiai



V. Novičenko, I. Ratas, Chaos **31**, 093138 (2021)

V. Novičenko, arXiv:2003.01596

# Pabaiga



**Vilnius  
University**

