n-tojo rango tenzoriaus simetrizavimas grupių teorijos kontekste

Viktor Novičenko

Balandis 2023, Vilnius

Vilnius University

Uždavinio formulavimas

Trimatėje erdvėje turime vektorinį fizikinį dydį $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots)$, kuris priklauso nuo keletos kitų vektorinių fizikinių dydžių $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$. Taip pat žinome, kad $\mathbf{J}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots) = \mathbf{0}$. Galime skleisti funkciją $\mathbf{J}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots)$ Teiloro eilute nulio aplinkoje:

$$J_i = \sum_{j=1}^{3} \gamma_{ij}^{(1,0,0)} A_j + \ldots + \sum_{j,k,l,m,n,p=1}^{3} \gamma_{ijklmnp}^{(2,1,3)} A_j A_k B_l C_m C_n C_p + \ldots$$

n-tojo rango tenzorius $\gamma_{ijklmnp}^{(2,1,3)}$ turi 3^n komponenčių

Konkretus uždavinys, kurį reikėjo spręsti Algirdui yra toks:

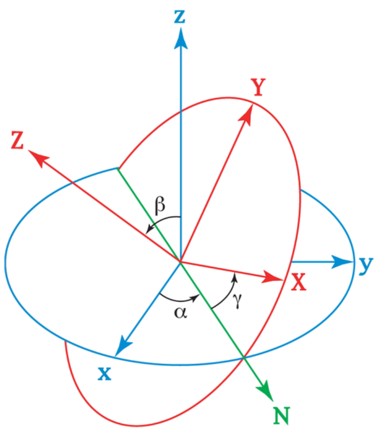
$$J_i = \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \gamma_{ijklm} E_j E_k E_l H_m$$

Pradžioje išnagrinėsime uždavinį, kai visi vektoriniai dydžiai yra skirtingi:

$$J_i = \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \gamma_{ijklm} A_j B_k C_l D_m$$

Kol kas tik tiesinė algebra (jokios grupių teorijos)

Visi posūkiai 3-matėje erdveje aprašomi 3-mis Eulerio kampais.



$$\mathbf{T}_Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_X(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_Z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bendra transformacijos matrica $\mathbf{T} = \mathbf{T}_Z(\gamma)\,\mathbf{T}_X(\beta)\,\mathbf{T}_Z(\alpha)$

Matrica yra ortogonali, nes $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}_Z^{-1}(\alpha)\,\mathbf{T}_X^{-1}(\beta)\,\mathbf{T}_Z^{-1}(\gamma) = \mathbf{T}_Z^T(\alpha)\,\mathbf{T}_X^T(\beta)\,\mathbf{T}_Z^T(\gamma) = \mathbf{T}^T$
arba komponentėm

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^T = \mathbf{1} \implies \sum_{j=1}^{3} T_{ij}\left(T^T\right)_{jk} = \sum_{j=1}^{3} T_{ij}T_{kj} = \delta_{ik}$$

Vektorius gali būti suprojektuotas į seną arba į naują koordinačių sistemą

$$\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3] = [A_1', A_2', A_3']$$

$$A_i' = \sum_{j=1}^{3} T_{ij}A_j \qquad A_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ji}A_j'$$

Tesiam tiesinę algebrą

$$J_i = \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \gamma_{ijklm} A_j B_k C_l D_m$$

$$X_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ji} X'_j$$

$$\sum_s T_{si} J'_s = \sum_{\substack{j,k,l,m \\ n,p,q,r}} \gamma_{ijklm} T_{nj} T_{pk} T_{ql} T_{rm} A'_n B'_p C'_q D'_r$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{3} T_{ij} T_{kj} = \delta_{ik}}$$

Dauginame iš T_{ti}, sumuojam per visus i, ir pasinaudoję ortogonalumo sąryšiu gauname

$$J'_t = \sum_{n,p,q,r} \left[\sum_{i,j,k,l,m} T_{ti} T_{nj} T_{pk} T_{ql} T_{rm} \gamma_{ijklm} \right] A'_n B'_p C'_q D'_r = \sum_{n,p,q,r} \gamma'_{tnpqr} A'_n B'_p C'_q D'_r$$

Tuomet tenzoriaus naujos komponentės išsireiškia per senas taip

$$\gamma'_{tnpqr} = \sum_{i,j,k,l,m} \boxed{T_{ti} T_{nj} T_{pk} T_{ql} T_{rm}} \gamma_{ijklm}$$

kas čia per "žveris"

Tesiam tiesinę algebrą

Panagrinėkime paprastesnį atvejį $\gamma'_{kl} = \sum_{i,j} T_{ki} P_{lj} \gamma_{ij}$

$$\gamma'_{kl} = T_{k1}P_{l1}\gamma_{11} + T_{k1}P_{l2}\gamma_{12} + T_{k1}P_{l3}\gamma_{13} + T_{k2}P_{l1}\gamma_{21} + T_{k2}P_{l2}\gamma_{22} + T_{k2}P_{l3}\gamma_{23} + T_{k3}P_{l1}\gamma_{31} + T_{k3}P_{l2}\gamma_{32} + T_{k3}P_{l3}\gamma_{33}$$

$$\boldsymbol{\gamma}' = \begin{pmatrix} \gamma'_{11} \\ \gamma'_{12} \\ \gamma'_{13} \\ \gamma'_{21} \\ \gamma'_{22} \\ \gamma'_{23} \\ \gamma'_{31} \\ \gamma'_{32} \\ \gamma'_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{P} \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{32} \\ \gamma_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{P} \boldsymbol{\gamma}$$

čia turime matricų tiesioginę sandaugą

$$\mathbf{T} \otimes \mathbf{P} = \begin{pmatrix} T_{11}\mathbf{P} & \cdots & T_{1n}\mathbf{P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m1}\mathbf{P} & \cdots & T_{mn}\mathbf{P} \end{pmatrix}$$

Taigi jei vektorizuosime 5 rango tenzorių (vektorius iš 243 komponenčių), tai turėsime

$$\boldsymbol{\gamma}' = \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{T}^{(5)} \boldsymbol{\gamma}$$

matrica kurios dimensija 243x243

Grupių teorijos pagrindai

Vilnius
University

Grupės apibrėžimas ir keleta pavyzdžių

Grupę sudaro bet kokia aibė $G = \{g_1, g_2, g_3, \ldots\}$, kurioje yra apibrėžta binarinė operacija turinčia sekančias savybes:

(i) pilnumas $g_i \cdot g_j = g_k \in G$

(ii) asociatyvumas $(g_i \cdot g_j) \cdot g_k = g_i \cdot (g_j \cdot g_k)$

(iii) vienetinis elementas $e \cdot g_i = g_i \cdot e = g_i$

(iv) atvirkštinis elementas $g_i \cdot g_i^{-1} = g_i^{-1} \cdot g_i = e$

Pavyzdys 1: $G = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

$$g_i \cdot g_j = (g_i + g_j) \mod n$$

Pavyzdys 2: $G = \{1, 2, \ldots, p-1\}$

$$g_i \cdot g_j = (g_i g_j) \mod p$$

Group-like structures

	Totality[α]	Associativity	Identity	Inverse	Commutativity
Partial magma	Unneeded	Unneeded	Unneeded	Unneeded	Unneeded
Semigroupoid	Unneeded	Required	Unneeded	Unneeded	Unneeded
Small category	Unneeded	Required	Required	Unneeded	Unneeded
Groupoid	Unneeded	Required	Required	Required	Unneeded
Magma	Required	Unneeded	Unneeded	Unneeded	Unneeded
Quasigroup	Required	Unneeded	Unneeded	Required	Unneeded
Unital magma	Required	Unneeded	Required	Unneeded	Unneeded
Semigroup	Required	Required	Unneeded	Unneeded	Unneeded
Loop	Required	Unneeded	Required	Required	Unneeded
Monoid	Required	Required	Required	Unneeded	Unneeded
Group	Required	Required	Required	Required	Unneeded
Commutative monoid	Required	Required	Required	Unneeded	Required
Abelian group	Required	Required	Required	Required	Required

^α The closure axiom, used by many sources and defined differently, is equivalent.

Pavyzdys 3: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$

Pavyzdys 4: $\mathbf{A} \in GL_n(\mathbb{C}) \quad \det(\mathbf{A}) \neq 0$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{AB}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Grupės įvaizdžiai, jų charakteriai

Grupes įvaizdys yra funkcija veikianti grupės elementą ir gražinanti tiesinį operatorių.

$$\mathbf{T}^{(\alpha)}(g_i) \in GL_n(\mathbb{C}) \qquad \mathbf{T}^{(\alpha)}(g_i)\,\mathbf{T}^{(\alpha)}(g_j) = \mathbf{T}^{(\alpha)}(g_i \cdot g_j) \qquad \mathbf{T}^{(\alpha)}(e) = \mathbf{1}_n$$

Įvaizdžiai tapatus jei $\mathbf{T}^{(\alpha)}(g_i) = \mathbf{T}^{(\beta)}(g_i)$ visiems i. Įvaizdžiai ekvivalentus jei egzistuoja tokia unitarinė matrica $\mathbf{U}$, kad $\mathbf{T}^{(\alpha)}(g_i) = \mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{T}^{(\beta)}(g_i)\,\mathbf{U}$ visiems i.

Du įvaizdžių pavyzdžiai:

(i) trivialus $\mathbf{T}^{(\mathrm{tr})}(g_i) = \mathbf{1}_1$

(ii) reguliarus $$g_i \cdot g_j = \sum_k T_{kj}^{(R)}(g_i)\, g_k$$

Įvaizdžio charakteris yra vektorius sudarytas iš įvaizdžio matricų pėdsako:

$$\chi^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}\left[\mathbf{T}^{(\alpha)}(g_1)\right] \\ \mathrm{Tr}\left[\mathbf{T}^{(\alpha)}(g_2)\right] \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Du įvaizdžiai turi tą patį charakterį $\Longleftrightarrow$ Du įvaizdžiai yra ekvivalentus

Įvaizdžių redukuojamumas, tiesioginė įvaizdžių sandauga, neredukuotinų įvaizdžių charakterių ortogonalumas

Vektorinės erdvės $\mathcal{L}_n$ įnvariantinis poerdvis $\mathcal{L}_m$ yra toks poerdvis, kurio bet kokį vektorių paveikus matrica $\mathbf{T}^{(\alpha)}(g_i)$ gaunu vektorių vėl iš to paties poerdvio.

$$\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_{n-m}$$

Įvaizdžio neredukuojamumo kriterijus ($\alpha = \mathrm{irr}$):

$$\left[\chi^{(\alpha)}\right]^{\dagger} \chi^{(\alpha)} = |G|$$

Neredukuotinų įvaizdžių charakterių ortogonalumas ($\alpha = \mathrm{irr},\ \beta = \mathrm{irr},\ \alpha \neq \beta$):

$$\left[\chi^{(\alpha)}\right]^{\dagger} \chi^{(\beta)} = 0$$

Dviejų įvaizdžų tiesioginė sandauga irgi yra įvaizdys:

$$\mathbf{T}^{(\alpha)}(g_i) \otimes \mathbf{T}^{(\beta)}(g_i) = \mathbf{T}^{(\gamma)}(g_i)$$

Grupių tiesioginė sandauga

Dvi grupes galima sudauginti ir vėl gausime grupę:

$$G = \{g_i, g_j, g_k, \ldots\} \qquad\qquad H = \{h_l, h_m, \ldots\}$$

$$G \times H = \{[g_i, h_l], [g_i, h_m], [g_j, h_l], [g_j, h_m], [g_k, h_l], [g_k, h_m], \ldots\}$$

$$[g_i, h_l] \cdot [g_j, h_m] = [g_i \bullet g_j, h_l * h_m]$$

Dviejų grupių įvaizdžius $\mathbf{T}^{(\alpha)}(g_i)$ ir $\mathbf{T}^{(\beta)}(h_l)$ sudauginus tiesiogiai gauname grupės $G \times H$ įvaizdį $\mathbf{T}^{(\gamma)}([g_i, h_l]) = \mathbf{T}^{(\alpha)}(g_i) \otimes \mathbf{T}^{(\beta)}(h_l)$

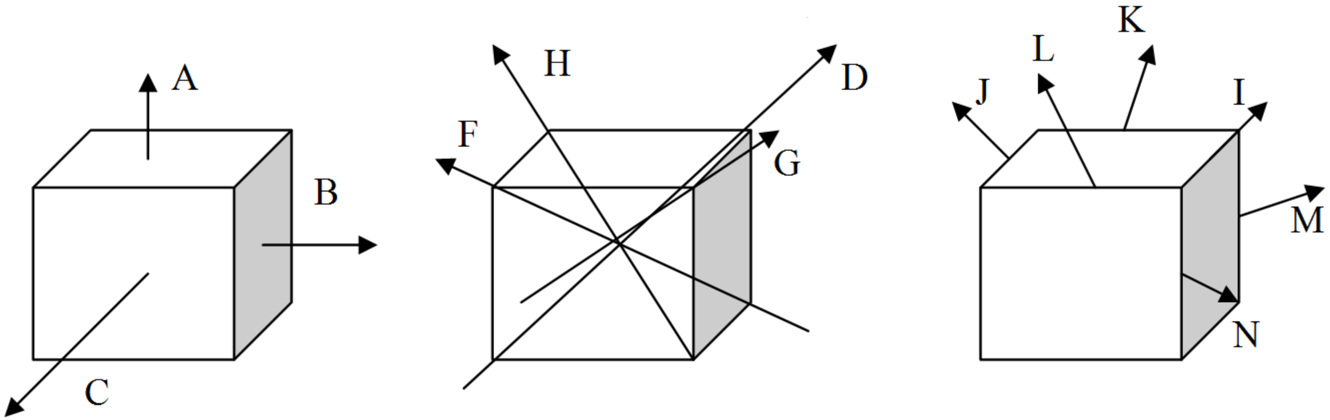
Kitas būdas gauti grupės $G \times H$ įvaizdį yra paprastai dauginti matricas $\mathbf{T}^{(\alpha)}(g_i)$ ir $\mathbf{T}^{(\beta)}(h_l)$ jei tik jų dimensijos sutampa ir jos komutuoja tarpusavyje skirtingom grupėm.

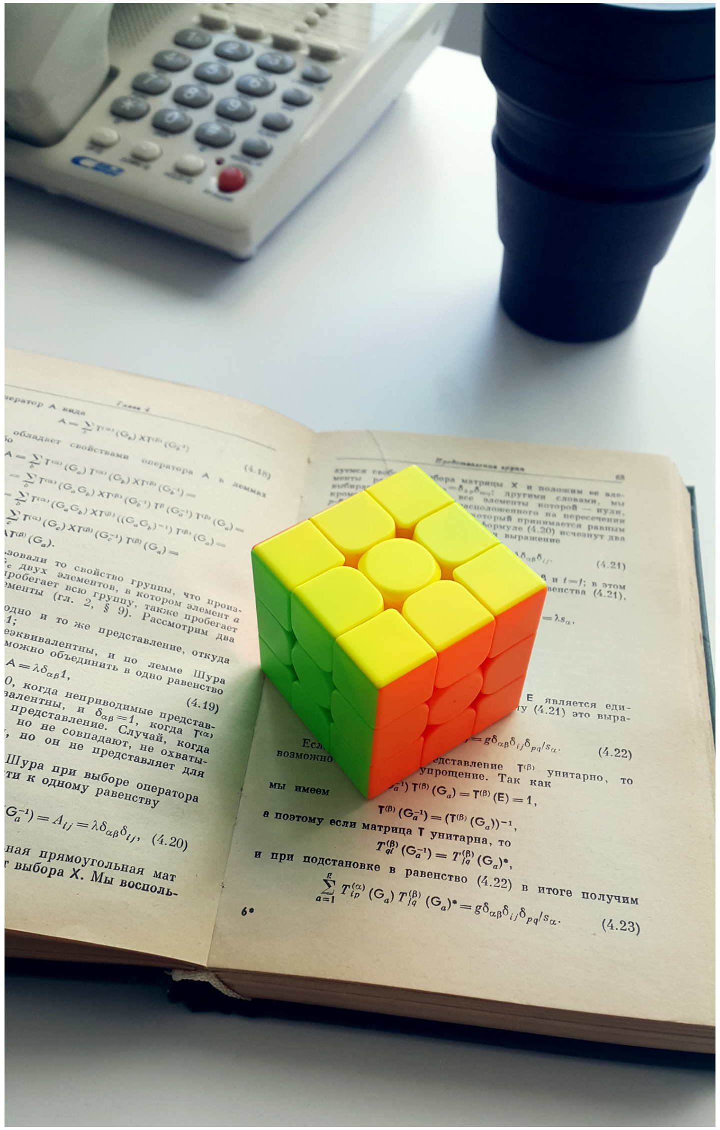
Grupių teorijos panaudojimas

Vilnius
University

Oktaedrinė grupė “O” arba keturių objektų perstatymo grupė S_4

Grupę sudaro visį kūbo posųkiai 3-matėje erdvėje, kurie gražina kūbą į pradinę padeti.
Grupę sudaro 24 elementai.





Grupės elementai yra posūkiai prieš laikrodžio rodyklę pagal ašis (A, B, C, D, F, G, H, I, J, K, L, M, N).
(A, B, C) - 90°, 180° ir 270°
(D, F, G, H) - 120° ir 240°
(I, J, K, L, M, N) - 180°

Grupės neredukuojamas 3-matis įvaizdis T

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} F_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

klasės pavadinimas	E	$8C_3$	$3C_2$	$6C_4$	$6C_2'$
kokie nariai yra klasėje	E	$D_1\ D_2\ F_1\ F_2\ G_1\ G_2\ H_1\ H_2$	$A_2\ B_2\ C_2$	$A_1\ A_3\ B_1\ B_3\ C_1\ C_3$	$I\ J\ K\ L\ M\ N$
įvaizdžio T charakteris	3	0	-1	1	-1

Įvaizdžio neredukuojamumo kriterijus: $\sum_{p=1}^{5} c_p \left|\chi_p\right|^2 = 1 \cdot (3)^2 + 8 \cdot (0)^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (1)^2 + 6 \cdot (-1)^2 = 24$

Redukuojamas 243-matis įvaizdis $\mathbf{T}^{(5)}$

Įvaizdys $\mathbf{T}^{(5)}$ yra 5 kartus tiesioginė sandauga įvaizdžių $\mathbf{T}$.

klasės pavadinimas	E	$8C_3$	$3C_2$	$6C_4$	$6C_2'$
įvaizdžio T_{tr} charakteris	1	1	1	1	1
įvaizdžio T charakteris	3	0	-1	1	-1
įvaizdžio $T^{(5)}$ charakteris	243	0	-1	1	-1

$$\mathbf{T}^{(5)} = m_{\mathrm{tr}} \mathbf{T}_{\mathrm{tr}} \oplus m\mathbf{T} \oplus \ldots$$

$$m_{\mathrm{tr}} = \frac{1 \cdot (243 \times 1) + 8 \cdot (0 \times 1) + 3 \cdot (-1 \times 1) + 6 \cdot (1 \times 1) + 6 \cdot (-1 \times 1)}{24} = \frac{243 - 3 + 6 - 6}{24} = 10$$

$$m = \frac{1 \cdot (243 \times 3) + 8 \cdot (0 \times 0) + 3 \cdot (-1 \times -1) + 6 \cdot (1 \times 1) + 6 \cdot (-1 \times -1)}{24} = \frac{729 + 3 + 6 + 6}{24} = 31$$

Sudarom projekcinį operatorių projektuojantį į trivialaus įvaizdžio invariantinius poerdvius:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{tr}} = \sum_{X=1}^{24} \left[\mathbf{T}_{\mathrm{tr}}(X)\right]_{11} \mathbf{T}^{(5)}(X) = \sum_{X=1}^{24} \mathbf{T}^{(5)}(X)$$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{tr}} \mathbf{v}_a = \begin{cases} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_{\mathrm{tr}}^t \text{ - vektorius kuris transformuojasi pagal trivialųjį įvaizdį} \end{cases} \qquad \text{čia } t = 1, 2, \ldots, 10$$

Oktaedrinės grupės įvaizdžio T^(5) matricų komutavimas su perstatymo grupės S_3 įvaizdžio matricomis

Perstatymo grupės S_3 elemento $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ įvaizdžio matrica $\mathbf{S}$ turi sukeisti 1 ir 3 indeksus

$$\mathbf{S}\gamma_{ijklm} = \gamma_{ilkjm}$$

Įveskime $\mathrm{in}\left(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\right)$ - indekso funkcija, tuomet matriciniai elementai yra:

$$S_{\mathrm{in}(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\mathrm{in}(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)} = \delta_{\mathrm{in}(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\mathrm{in}(b_1,b_4,b_3,b_2,b_5)}$$

Dauginame iš abiejų pusių

$$\mathbf{ST}^{(5)}\left(\cdot\right) = \mathbf{L} \quad \Rightarrow \quad L_{\mathrm{in}(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\mathrm{in}(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)} = T^{(5)}_{\mathrm{in}(a_1,a_4,a_3,a_2,a_5)\mathrm{in}(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)}\left(\cdot\right)$$

$$\mathbf{T}^{(5)}\left(\cdot\right)\mathbf{S} = \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad R_{\mathrm{in}(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\mathrm{in}(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)} = T^{(5)}_{\mathrm{in}(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\mathrm{in}(b_1,b_4,b_3,b_2,b_5)}\left(\cdot\right)$$

Tačiau

$$T^{(5)}_{\mathrm{in}(a_1,a_4,a_3,a_2,a_5)\mathrm{in}(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)}\left(\cdot\right) = T_{a_1b_1}\left(\cdot\right)T_{a_4b_2}\left(\cdot\right)T_{a_3b_3}\left(\cdot\right)T_{a_2b_4}\left(\cdot\right)T_{a_5b_5}\left(\cdot\right)$$

Pabaiga

Vilnius University