

Vilniaus universitetas  
Fizikos fakultetas  
Teorinės fizikos katedra

Viktor Novičenko

## **Dirbtinio magnetinio lauko poveikis šaltiems atomams**

Magistrantūros studijų baigiamasis darbas  
(studijų programa – teorinė fizika ir astrofizika)

Studentas:  
Darbo vadovas:  
Konsultantas:  
Recenzentas:  
Katedros vedėjas:

Viktor Novičenko  
habil. dr. Gediminas Juzeliūnas  
dr. Julius Ruseckas  
doc. habil. dr. Egidijus Anisimovas  
prof. habil. dr. Leonas Valkūnas

Vilnius 2009

# Turinys

<b>Įvadas</b>	<b>3</b>
<b>Darbe naudoti pažymėjimai ir sąvokos</b>	<b>4</b>
<b>1 Kvantinės mikrodalelių sistemos nagrinėjimas</b>	<b>5</b>
1.1 Viennelektronis atomas . . . . .	5
1.2 $N$ -elektronis atomas . . . . .	6
1.3 Viennelektronis atomas veikiamas šviesa . . . . .	7
1.4 $N$ -elektronis atomas veikiamas šviesa . . . . .	9
<b>2 Atomo sąveika su elektromagnetiniu lauku</b>	<b>10</b>
2.1 $\Lambda$ -tipo atomas ir jo „tamsi“ būseną . . . . .	12
2.2 Efektyvus magnetinis laukas . . . . .	13
2.3 Dviejų priešpriešais sklindančių šviesos Gauso pluoštų indukuotas magnetinis laukas . . . . .	14
2.4 Stovinčios ir plokščios bangų indukuotas magnetinis laukas . . . . .	15
2.5 Gauso ir pirmos eilės Ermito – Gauso šviesos pluoštų indukuotas magnetinis laukas	17
<b>3 Kvantinės dalelės judėjimas nevienalyčiame magnetiniame lauke</b>	<b>19</b>
3.1 Dviejų priešpriešais sklindančių Gauso pluoštų indukuoto magnetinio lauko įtaka atomo judėjimui . . . . .	22
3.2 Gauso ir pirmos eilės Ermito – Gauso pluoštų indukuoto magnetinio lauko įtaka atomo judėjimui . . . . .	26
<b>Išvados</b>	<b>30</b>
<b>Literatūra</b>	<b>31</b>
<b>Santrauka</b>	<b>32</b>
<b>Summary</b>	<b>33</b>

## Įvadas

Kvantinės mechanikos požiūriu nagrinėjant mikrodalelių sistemą, susidedančią iš kelių tarpusavyje sąveikaujančių elementariųjų dalelių, tenka spręsti lygtis, kur sistemą aprašanti banginė funkcija priklauso nuo labai daug kintamųjų [1]. Tokių lygčių nagrinėjimas dažniausiai būna per daug sudėtingas. Todėl norint įvertinti išorinį poveikį sistemai, susidedančiai iš sunkios dalelės ir daug kartų už ją lengvesnių dalelių, lygtis stengiamasi suvesti prie vienos dalelės judėjimo potenciale, kuris atspindi išorinio poveikio įtaką lengvoms dalelėms [2]. Atomui tai būtų branduolio judėjimas potenciale, kuris atsiranda dėl išorinio poveikio į elektronų judėjimą.

Kaip žinome, šviesos srautas beveik neveikia pavienių atomų branduolių. Tačiau jei branduolys yra surištas su elektronais, t.y. jei turime atomą, tai jo masių centro judėjimas gali būti gana įdomus dėl šviesos įtakos į atomą sudarančių elektronų judėjimą [3].

**Šiame darbe mes parodysime, kaip keli šviesos pluoštai veikdami elektriskai neutralų atomą, sukuria tokį jo judėjimą, kuris atitinka įelektrintos dalelės judėjimą magnetiniame lauke [4,5]. Darbe išnagrinėtas toks šviesos poveikis atomams kai turime konkrečius šviesos pluoštus, bei aptarti atsiradę įdomūs efektai dėl minėto poveikio.**

## Darbe naudoti pažymėjimai ir sąvokos

$N$  - elektronų skaičius atome, jei nepamíneta kitaip.

$N$ -matės erdvės tūrio elementas žymimas  $dq = dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 \dots dz_N$ , čia  $x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_N$  - elektronų koordinatės Dekarto koordinatinių sistemoje.

$e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  C - elektrono krūvis.

Vietoje bra ir ket vektoriais užrašomo operatoriaus  $|i\rangle \langle j|$  buvo naudojamas integralinis operatorius  $\psi_i \int \psi_j^* \dots dq$ , čia vietoje daugtaškio reikia įterpti veikiamą funkciją.

Šiame darbe skyriai yra numeruojami vienu skaičiumi, o poskyriai numeruojami dviem skaičiais, atskirtais tašku.

# 1 Kvantinės mikrodalelių sistemos nagrinėjimas

Mikrodalelių sistema kvantinės mechanikos požiūriu yra aprašoma bangine funkcija priklausanti nuo laiko ir erdviųjų kintamųjų, kurių yra tiek, kiek yra dalelių mikrosistemoje. Tuo atveju, kai viena dalelė yra sunki, o kitos lengvos, visą judėjimą galima atskirti į dvi sudedamąsias dalis: lengvų dalelių greitas judėjimas ir sunkios dalelės lėtas judėjimas. Toks atskirimas vadinamas adiabatiniu artiniu. Šio skyriaus tikslas ir bus parodyti kaip vyksta greito ir lėto judėjimų atskirimas. Mes nagrinėsime atomą, veikiamą elektromagnetiniu bangu. Iškart nagrinėti  $N + 1$  dalelių ( $N$  elektronų ir vienas branduolys) gali pasirodyti per daug sudėtinga ir painu, todėl aš nusprendžiau šiame darbe pirmai išnagrinėti paprastesnius atvejus, o po to pereiti prie sudėtingo atvejo. Noriu pabrėžti, kad paprasųjų atvejų nagrinėjimas neturi jokios mokslinės vertės. Tai darau tik iš metodinio požiūrio. Taigi šio skyriaus pirmame poskyrije bus parodytas judėjimų atskirimas, kai turime vandenilio atomą be išorinio veikimo. Tada antrame poskyrije bus nagrinėjamas adiabatinio artinio taikymas, kai turime  $N$ -elektronį atomą neesant išoriniam poveikiui. Tada trečiame poskyrije išnagrinėsime adiabatinį artinį, kai turime vandenilio atomą veikiamą šviesa. Ir ketvirtame poskyrije išnagrinėsime bendrą atvejį, kai turime  $N$ -elektronį atomą veikiamą šviesa.

Adiabatinis judėjimų atskirimas vyks pereinant iš laboratorinės atskaitos sistemos į atomo masės centro atskaitos sistemą. Šiame skyriuje naudosimes tokiu sutarimu: jei radius vektorius yra su štrichu, tai jis parodo dalelės padetį laboratorinėje atskaitos sistemoje, jei be štricho, tai jis parodo dalelės padetį masės centro atskaitos sistemoje. Elektronų radius vektorius žymesime su skaičiais, o branduolio be skaičiaus. Taigi  $\mathbf{r}'_2$  žymi antro elektrono padetį laboratorinėje atskaitos sistemoje, o  $\mathbf{r}_3$  yra trečio elektrono radius vektorius atomo masės centro atskaitos sistemoje.

## 1.1 Viennelektronis atomas

Hamiltono operatorius vienelektroniam (vandenilio) atomui laboratorinėje atskaitos sistemoje užsirašytu taip

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla'^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_1'^2 - \frac{ke^2}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_1|} \quad (1.1)$$

čia  $M$  - branduolio masė,  $m$  - elektrono masė,  $k = 1/4\pi\epsilon_0$  - Kulono elektrostatinės sąveikos konstanta. Nabla operatorių žymėjimas yra toks pat, kaip ir ankščiau aprašyto radius vektorių žymėjimas. Taigi lygties (1.1) pirmas narys yra kinetinė branduolio energija, antras narys yra kinetinė elektrono energija ir trečias narys yra sąveika tarp elektrono ir branduolio. Iš tikro šiuo paprastu atveju nereikia net pereidinėti į masės centro atskaitos sistemą, norint atskirti lėtąjį ir greitąjį judėjimą. Mat antras ir trečias Hamiltono operatoriaus nariai veikia tik elektroninį kintamąjį, o branduolio koordinatė įeina tik kaip parametras. Tačiau vistiek

padarysime pereinimą. Taigi įvedam naujus kintamuosius:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \frac{M\mathbf{r}' + m\mathbf{r}'_1}{M + m} \\ \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}' \end{cases} \quad (1.2)$$

Tada nabla operatoriai išsireikš taip:

$$\begin{cases} \nabla' = \frac{M}{M + m} \nabla - \nabla_1 \\ \nabla'_1 = \frac{m}{M + m} \nabla + \nabla_1 \end{cases} \quad (1.3)$$

Perrašius Hamiltono operatorių naujuose kintamuosiose, gauname:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2(M + m)} \nabla^2 - \frac{\hbar^2}{2\frac{mM}{M+m}} \nabla_1^2 - \frac{ke^2}{|\mathbf{r}_1|} \quad (1.4)$$

Dabar matome, kad Šredingerio lygties sprendima galime suvesti prie dievų atskirų lygčių sprendimo, nes (1.4) pirmas narys veikia tik kintamąjį  $\mathbf{r}$ , o antras ir trečias nariai veikia kintamąjį  $\mathbf{r}_1$ .

## 1.2 $N$ -elektornis atomas

Hamiltono operatorius  $N$ -elektroniam atomui laboratorinės atskaitos sistemos koordinatėse užsirašo taip:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla'^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_j \nabla_j'^2 - \sum_j \frac{Nke^2}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_j|} + \sum_{j,n \neq j} \frac{ke^2}{|\mathbf{r}'_j - \mathbf{r}'_n|} \quad (1.5)$$

čia ir toliau sumuojama yra per visus elektronus nuo 1 iki  $N$ , trečiame naryje daugiklis  $N$  atsirado, nes branduolio krūvis yra lygus elektronų skaičiui. Dabar darom tokį koordinatėjų pakeitimą:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \frac{M\mathbf{r}' + m\mathbf{r}'_1 + \dots + m\mathbf{r}'_N}{M + Nm} \\ \mathbf{r}_j = \mathbf{r}'_j - \mathbf{r}' \end{cases} \quad (1.6)$$

Tokiu atveju nabla operatoriai transformuojasi taip:

$$\begin{cases} \nabla' = \frac{M}{M + m} \nabla - \sum_j \nabla_j \\ \nabla'_j = \frac{m}{M + m} \nabla + \nabla_j \end{cases} \quad (1.7)$$

Po tokios manipuliacijos Hamiltono operatorius naujose koordinatėse užsirašys tokiu pavi-

dalū:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2(M + Nm)} \nabla^2 - \frac{\hbar^2}{2\left(\frac{mM}{M+Nm}\right)} \sum_j \nabla_j^2 - \frac{\hbar^2}{M} \sum_{j,n \neq j} \nabla_j \nabla_n - \sum_j \frac{Nke^2}{|\mathbf{r}_j|} + \sum_{j,n \neq j} \frac{ke^2}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_n|} \quad (1.8)$$

Išraiškoje (1.8) trečias narys pagal savo pobūdį labai panašus į antrą narį, nes yra dvi išvestinės pagal elektronų koordinates. Bet prie trečio nario vardiklyje yra branduolio masė, o antro nario vardiklyje yra redukuota elektrono masė. O ji žymiai mažesne už branduolio masę. Todėl iš (1.8) trečia narį galima išmesti. Hamiltono operatorius tada pavirsta tokiu:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2(M + Nm)} \nabla^2 - \frac{\hbar^2}{2\left(\frac{mM}{M+Nm}\right)} \sum_j \nabla_j^2 - \sum_j \frac{Nke^2}{|\mathbf{r}_j|} + \sum_{j,n \neq j} \frac{ke^2}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_n|} \quad (1.9)$$

(1.9) išraiškoje matome, kad greitas ir lėtas judėjimai atsiskiria, nes pirmas narys veikia tik masės centro koordinates, o likę nariai veikia elektronų koordinates masės centro atskaitos sistemoje.

### 1.3 Vienelektronis atomas veikiamas šviesa

Dabar nagrinėsime kaip taikyti adiabatinį artinį vienelektroniam atomui, kurį veikia šviesa. Šviesos poveikis į sistemos hamiltonianą isirašo, kaip vektorinis potencialas. Taigi vienelektronio atomo sistemai, kurią veikia šviesa, Hamiltono operatorius bus:

$$\hat{H} = \frac{1}{2M} (-i\hbar\nabla' + e\mathbf{A}(\mathbf{r}', t))^2 + \frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla'_1 - e\mathbf{A}(\mathbf{r}'_1, t))^2 - \frac{ke^2}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_1|} \quad (1.10)$$

čia  $\mathbf{A}$  yra vektorinis potencialas. Dar karta paminėsiu, kad  $e$  yra elektrono krūvis (neigiamas dydis). Todėl pirmuose skliaustuose prie  $e$  yra pliuso ženklas (branduolys turi teigiamą krūvį), o antruose skliaustuose prie  $e$  yra minuso ženklas. Vektorinį potencialą aš sukonkretinsiu vėliau 2 skyriuje, kai nagrinėsiu greito judėjimo lygties sprendimą, bet reikia paminėti, kad jis bus proporcingas sinuso f-jai, kurios erdvinis periodas bus optinio bangos ilgio eilės. O tai mums duos galimybę, esant fiksuotai branduolio vietai, laikyti jį nekintančių erdvėje. Mat elektronas nuo branduolio būna nutolęs keliomis eilėmis mažesniu atstumu, negu optinis bangos ilgis. Toks artinys vadinamas dipoliniu artiniu.

Taigi dabar įvedam naujas koordinates pagal (1.2), nabla operatoriai taip pat transformuos kaip ir (1.3). Kadangi po transformacijos atsiras daug narių, pirmai išrašysiu, kaip transformuojasi pirmas (1.10) sumos narys:

$$-\frac{\hbar^2 M}{2(M+m)^2} \nabla^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \nabla_1^2 + \frac{\hbar^2}{2(M+m)} \nabla \nabla_1 - \frac{i\hbar e}{M+m} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \nabla + \frac{i\hbar e}{M} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \nabla_1 + \frac{e^2 \mathbf{A}^2(\mathbf{r}, t)}{2M} \quad (1.11)$$

Iškarto pasakysiu, kad (1.11) nėra narių su  $(\nabla \cdot \mathbf{A})$ , nes esant konkrečiai elektromagnetiniam bangai vektorinį potencialą visada galima parinkti taip, kad jis tenkintų Kulono kalibruotes sąlygą  $\text{div} \mathbf{A} = 0$ . Taip pat dėl dipolinio artinio  $\mathbf{A}$  priklauso tik nuo  $\mathbf{r}$ . Dabar transformuojame

antrą sumos (1.10) narij:

$$-\frac{\hbar^2 m}{2(M+m)^2} \nabla^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2(M+m)} \nabla \nabla_1 + \frac{i\hbar e}{M+m} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \nabla + \frac{i\hbar e}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \nabla_1 + \frac{e^2 \mathbf{A}^2(\mathbf{r}, t)}{2m} \quad (1.12)$$

Dabar galima susumuoti (1.11) ir (1.12). Pirmi, antri ir penkti nariai susigruopuoja, tada treči ir ketvirtai išsiprastina, o šeštus narius galima atmesti dėl to, kad jie atitinka mažą šuolio tikimybę (iš [1] galima matyti, kad pereinant nuo (7.26) į (7.27) narys su  $\mathbf{A}^2$  buvo išmestas). Taigi naujose koordinatėse (1.10) išraiška virsta:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2(M+m)} \nabla^2 - \frac{\hbar^2}{2\frac{mM}{M+m}} \nabla_1^2 - \frac{ke^2}{|\mathbf{r}_1|} + \frac{i\hbar e}{\frac{mM}{M+m}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \nabla_1 \quad (1.13)$$

Dabar darysime greito ir lėto judėjimų atskirimą. Išskirkime iš (1.13) tą dalį, kuri veikia elektrono koordinatę:

$$\hat{H}_e = -\frac{\hbar^2}{2\frac{mM}{M+m}} \nabla_1^2 - \frac{ke^2}{|\mathbf{r}_1|} + \frac{i\hbar e}{\frac{mM}{M+m}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \nabla_1 \quad (1.14)$$

Šredingerio lygties sprendinį su operatorium  $\hat{H}_e$  pažymėkime  $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t)$  taigi:

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = \hat{H}_e \chi \quad (1.15)$$

Pačios (1.15) lygties sprendimą nagrinėsime 2 skyriuje, bet reik paminėti, kad f-jai  $\chi$  galioja normuotumo sąlyga  $\int \chi^* \chi dq = 1$ , čia integruojama yra per visas elektrono erdvines koordinatas  $\mathbf{r}_1$ . Dabar pilnos Šredingerio lygties su hamiltonianu (1.13) sprendinio ieškosime dviejų f-jų sandaugos pavidalu  $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t) = a(\mathbf{r}, t) \chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t)$ . F-jos  $\chi$  fizikinė prasmė tokia: elektrono būseną, esant fiksuotai branduolio koordinatėi (greitas judėjimas). O f-ja  $a$  aprašo lėtą masės centro judėjimą. Taigi  $\Psi$  statom į Šredingerio lygtį su (1.13) hamiltonianu ir atsižvelgę į (1.15) gauname :

$$i\hbar \frac{\partial a}{\partial t} \chi = -\frac{\hbar^2}{2(M+m)} [\chi \nabla^2 a + 2(\nabla a \cdot \nabla \chi) + a \nabla^2 \chi] \quad (1.16)$$

Toliau (1.16) padaugine iš  $\chi^*$  ir suintegravus per visas elektrono erdvines koordinatas gauname:

$$i\hbar \frac{\partial a}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2(M+m)} (-i\hbar \nabla - \mathbf{A})^2 + \varphi \right] a \quad (1.17)$$

čia įvesti vektorinis ir skaliarinis potencialai yra efektyvus (nepainioti su tikru vektoriniu potencialu  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ ). Jie priklauso nuo f-jos  $\chi$  taip:

$$\mathbf{A} = i\hbar \int \chi^* \nabla \chi dq \quad (1.18)$$

$$\varphi = \frac{\hbar^2}{2(M+m)} \left[ \int \nabla \chi^* \cdot \nabla \chi dq + \left( \int \chi^* \nabla \chi dq \right)^2 \right] \quad (1.19)$$



Matome, kad lygtis (1.17) visiškai sutampa su ielektrintos dalelės lygtimi, judančios vektoriniame ir skaliariniame potencialuose. Toks ir buvo musu tikslas – parodyti, kad lėto judėjimo lygtis susiveda prie lygties (1.17). Dar reikėtų paminėti vieną svarbų faktą apie vektorinio (1.18) ir skaliarinio (1.19) potencialų kalibruotės transformaciją. Mat jeigu  $\chi$  yra (1.15) lygties sprendinys, tai ir  $\chi' = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}u(\mathbf{r}, t)\right)\chi$  bus (1.15) lygties sprendinys ( $u(\mathbf{r}, t)$  - reali f-ja). O tada potencialai transformuosis taip:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla u \quad (1.20)$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.21)$$

Tai yra potencialų kalibruotės transformacija. Reik dar paminėti, kad po tokios transformacijos (1.17) lygties naujas sprendinys per seną sprendinį išsireiškš taip :

$$a' = \exp\left(\frac{i}{\hbar}u(\mathbf{r}, t)\right)a \quad (1.22)$$

#### 1.4 $N$ -elektronis atomas veikiamas šviesa

Dabar nagrinėsime  $N$ -elektronį atomą veikama šviesa, apjungdami 1.2 ir 1.3 poskyrių nagrinėjimą. Sistemos hamiltonianas atrodo taip:

$$\hat{H} = \frac{1}{2M} (-i\hbar\nabla' + Ne\mathbf{A}(\mathbf{r}', t))^2 + \frac{1}{2m} \sum_j \left(-i\hbar\nabla - e\mathbf{A}(\mathbf{r}'_j, t)\right)^2 - \sum_j \frac{Nke^2}{|\mathbf{r}'_j - \mathbf{r}'|} + \sum_{j,n \neq j} \frac{ke^2}{|\mathbf{r}'_j - \mathbf{r}'_n|} \quad (1.23)$$

Dabar darom koordinačių pakeitimus kaip (1.6), nabla operatoriai transformuosis kaip (1.7). Analogiškai su 1.3 nagrinėjimu padarę išprastinimus gauname tokį sutvarkytą hamiltonianą:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2(M + Nm)} \nabla^2 - \frac{\hbar^2}{2\frac{mM}{M+m}} \sum_j \nabla_j^2 - \sum_j \frac{Nke^2}{|\mathbf{r}_j|} + \sum_{j,n \neq j} \frac{ke^2}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_n|} + \sum_j \frac{i\hbar e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\frac{mM}{M+m}} \nabla_j \quad (1.24)$$

Vėl gi kaip ir 1.3 poskyrije išskiriame iš (1.24) tą dalį, kuri veikia tik elektronų koordinatinius kintamuosius:

$$\hat{H}_e = -\frac{\hbar^2}{2\frac{mM}{M+Nm}} \sum_j \nabla_j^2 - \sum_j \frac{Nke^2}{|\mathbf{r}_j|} + \sum_{j,n \neq j} \frac{ke^2}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_n|} + \sum_j \frac{i\hbar e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\frac{mM}{M+m}} \nabla_j \quad (1.25)$$

Toliau viskas galioja tas pats, kaip ir 1.3 poskyrije, skirtumas tik tas, kad pilnos Šredingerio lygties sprendinio ieškome  $\Psi = a \cdot \chi$  pavidalu, kur  $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$  priklauso nuo visų elektronų koordinačių. Su kalibruotės transformacijom galioja tos pačios (1.20), (1.21) ir (1.22) formulės.

## 2 Atomo sąveika su elektromagnetiniu lauku

Praeitame skyriuje išnagrinėjome, kaip pilnos šredingerio lygties sprendimą, taikant adiabatinį artinį, suskaidyti į greito judėjimo lygtį (lygtis elektronų judėjimui) ir lėto judėjimo lygtį (lygtis masės centro judėjimui). Taigi šiame skyriuje nagrinėsime greito judėjimo lygties sprendimą.

Kaip žinome, atomas sąveikauja su elektromagnetiniu lauku. Tai pasireiškia tuo, kad elektronai pereina į kitas energetines būsenas. Energetinė būsena pasikeičia tada, kai elektromagnetinio lauko dažnis padaugintas iš mažosios Planko konstantos yra apytiksliai lygus energijų skirtumui tarp būsenų  $\hbar\omega = E_j - E_n$ . Mes dabar nagrinėsime tokį atvejį: atomas turi du lygmenys, ir yra rezonansinė elektromagnetinė banga, kuri sukelia priverstinius šuolius tarp tų lygmenų. Klausimas: kas vyks su atomo elektronine būsena?

Pirmai sukonkretinsim vektorinį potencialą, kuris atspindės elektromagnetinės bangos poveikį. Tarkim turim elektromagnetinę bangą, kurios elektrinį lauką aprašo tokia f-ja:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (2.1)$$

čia  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$  yra amplitudė, kuri lėtai priklauso nuo  $\mathbf{r}$ , lyginant su sinuso f-ja. Tokia amplitudė reikalinga, nes mes nagrinėsime ne tiesiog plokščias bangas, o įvairius pluoštus. Toliau žinant, kad vektorinis potencialas turi patenkinti lygtį:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.2)$$

randam jį tokiu pavidalu:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)}{\omega} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (2.3)$$

Aš 1 skyjuje minėjau, kad vektorinis potencialas turės tenkinti Kulono kalibruotės sąlygą  $\text{div} \mathbf{A} = 0$ , tuo tarpu matome, kad (2.3) netenkina minėtos sąlygos. Problema yra tame, kad jau pati elektrinio lauko išraiška (2.1) yra tiksliai matematiškai negalima, nes netenkina bangos lygties. Bet paklaida yra maža, nes kaip minėjau  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$  silpnai priklauso nuo  $\mathbf{r}$ .

Taigi dabar mums reikia spresti Šredingerio lygtį, su hamiltonianu (1.25), kai vektorinis potencialas yra (2.3). Iš (1.25) išskirkime pirmus tris narius, ir pažymekime juos taip (nuo šiol dėl paprastumo redukuota elektrono masę žymėsiu tiesiog  $m$ , o visa atomo masę  $M$ ):

$$\hat{H}_{e0} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_j \nabla_j^2 - \sum_j \frac{Nke^2}{|\mathbf{r}_j|} + \sum_{j,n \neq j} \frac{ke^2}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_n|} \quad (2.4)$$

Nesunku isitikinti, kad nabla operatorių galima išreikšti taip:

$$\nabla_j = \frac{m}{\hbar^2} \left[ \mathbf{r}_j \hat{H}_{e0} - \hat{H}_{e0} \mathbf{r}_j \right] \quad (2.5)$$

Tai mums padeda operatorių (1.25) supaprastinti iki tokios išraiškos:

$$\hat{H}_e = \hat{H}_{e0} + \sum_j \frac{ie\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\hbar} [\mathbf{r}_j \hat{H}_{e0} - \hat{H}_{e0} \mathbf{r}_j] \quad (2.6)$$

Dabar apsiriboję dviem tikrinėm operatoriaus (2.4) f-jom  $\psi_1(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  ir  $\psi_2(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  su tikrinėm vertėm  $E_1$  ir  $E_2$  užrašom operatorių (2.6) integralinėje formoje:

$$\begin{aligned} \hat{H}_e = & \psi_1 E_1 \int \psi_1^* \dots dq + \psi_2 E_2 \int \psi_2^* \dots dq + \psi_1 \frac{i\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{d}_{21}^*}{\hbar\omega} (E_1 - E_2) \cos(\omega t) \int \psi_2^* \dots dq + \\ & + \psi_2 \frac{i\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{d}_{21}}{\hbar\omega} (E_2 - E_1) \cos(\omega t) \int \psi_1^* \dots dq \end{aligned} \quad (2.7)$$

čia  $\mathbf{d}_{21} = e \sum_j \int \psi_2^* \mathbf{r}_j \psi_1 dq$  - elektronio dipolinio momento operatoriaus matricinis elementas.

Dabar ieškom Šredingerio lygties su (2.7) hamiltonianu sprendinio tokiu pavidalu:

$$\psi = \psi_1 \exp\left(\frac{E_1 t}{i\hbar}\right) c_1(\mathbf{r}, t) + \psi_2 \exp\left(\frac{E_2 t}{i\hbar}\right) c_2(\mathbf{r}, t) \quad (2.8)$$

Koeficientam  $c_1$  ir  $c_2$  gauname tokią diferencialinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \dot{c}_1 = -\frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{d}_{21}^*}{\hbar\omega} \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \cos(\omega t) \exp\left[\frac{(E_2 - E_1)t}{i\hbar}\right] c_2 \\ \dot{c}_2 = \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{d}_{21}}{\hbar\omega} \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \cos(\omega t) \exp\left[\frac{(E_1 - E_2)t}{i\hbar}\right] c_1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Ši diferencialinių lygčių sistema analiziškai nėra išsprendžiama. Tačiau ją galima išspręsti apytiksliai. Pradžioje įveskime standartinį pažymėjimą (kuris dažnai naudojamas literatūroje [6])  $\Omega_{21} = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{d}_{21}/2\hbar$ . Jis vadinamas Rabi dažniu. Dabar kosinusą pakeiskime eksponenčių suma, ir atsižvelgę į tai, kad  $(E_2 - E_1)/\hbar = \omega$  gauname:

$$\begin{cases} \dot{c}_1 = -\Omega_{21}^* c_2 [1 + \exp(-2i\omega t)] \\ \dot{c}_2 = \Omega_{21} c_1 [1 + \exp(2i\omega t)] \end{cases} \quad (2.10)$$

(2.10) lygčių sistemos sprendinys nedaug pakistu, jei atmestume eksponentes, esančias dešinėje pusėje. Tą galima pamatyti iš [2], kur 40-to skyriaus pabaigoje yra išspręstas panašus uždavinys. Eksponenčių (2.10) atmetimas yra tas pats, kas vietoje kosinuso (2.9) viršutinėje lygtyje rašyti  $\exp(i\omega t)$ , o apatinėje lygtyje rašyti  $\exp(-i\omega t)$ . Todėl eksponentes vietoje kosinusių galima rašyti pačiame Hamiltono operatoriuje (2.7). Tada hamiltonianas supaprastėja iki tokio:

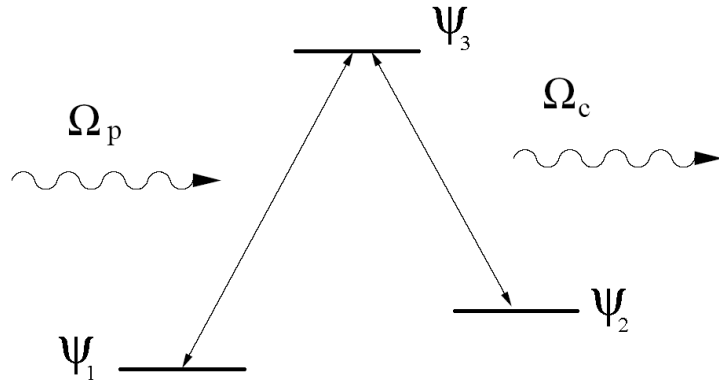
$$\begin{aligned} \hat{H}_e = & \psi_1 E_1 \int \psi_1^* \dots dq + \psi_2 E_2 \int \psi_2^* \dots dq - i\hbar\Omega_{21}^* \exp(i\omega t) \psi_1 \int \psi_2^* \dots dq + \\ & + i\hbar\Omega_{21} \exp(-i\omega t) \psi_2 \int \psi_1^* \dots dq \end{aligned} \quad (2.11)$$

Toks hamiltonianas duoda atsakymą į ankščiau užduotą klausimą, kas vyks su atomu: bū-

seną periodiškai keičia nuo  $\psi_1$  prie  $\psi_2$ , o svyravimų dažnis ir yra Rabi dažnis  $\Omega_{21}$ . Atsakymas yra logiškas, nes kuo didesnis elektromagnetinės bangos intensyvumas, tuo didesnis gaunasi Rabi dažnis, o tada atitinkamai tuo dažniau vyksta svyravimas tarp būsenų.

## 2.1 $\Lambda$ -tipo atomas ir jo „tamsi“ būsena

Ankščiau nagrinėjome du atomo energetinius lygmenys. Dabar nagrinėsime konkrečią atomo lygmenų konfigūraciją, kuri vadinasi  $\Lambda$ -tipu. Sakykim turime du energetiškai artimus lygmenys, tarp kurių šuolis yra draustinis, ir vieną aukštesnės energijos lygmenį 1 pav. Dabar atomas yra apšviečiamas dviem lazeriais, kurie sukelia šuolius tarp pirmo ir trečio, ir tarp antro ir trečio lygmenų. Jei šių spinduliuočių Rabi dažnius pažymėsime  $\Omega_P = \mathbf{d}_{31}\mathbf{E}_P/2\hbar$  ir  $\Omega_C = \mathbf{d}_{32}\mathbf{E}_C/2\hbar$ ,



1 pav.:  $\Lambda$ -tipo atomo lygmenų konfigūracija

tai pagal (2.11) Hamiltono operatoriaus narys, atitinkantis sąveiką su lazeriais, atrodo taip:

$$\begin{aligned} \hat{V} = & -i\hbar\Omega_P^* \exp(i\omega_P t) \psi_1 \int \psi_3^* \dots dq + i\hbar\Omega_P \exp(-i\omega_P t) \psi_3 \int \psi_1^* \dots dq - \\ & -i\hbar\Omega_C^* \exp(i\omega_C t) \psi_2 \int \psi_3^* \dots dq + i\hbar\Omega_C \exp(-i\omega_C t) \psi_3 \int \psi_2^* \dots dq \end{aligned} \quad (2.12)$$

Mums reikia spresti Šredingerio lygtį:

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_{e0} - \hat{V} \right) \psi = 0 \quad (2.13)$$

Jei operatorių, esanti (2.13) kairėje pusėje užrašyti matriciniu pavidalu  $\psi_j \exp(E_j t / i\hbar)$  funkcijų bazėje, tai uždavinys susives į tikrinės f-jos, kurios tikrinė vertė  $\lambda = 0$ , radimą. Tagi operatoriaus matrica yra:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & i\hbar\Omega_P^* \\ 0 & 0 & i\hbar\Omega_C^* \\ -i\hbar\Omega_P & -i\hbar\Omega_C & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Ji turi tris tikrines vertes:  $\lambda_1 = 0$  ir  $\lambda_{2,3} = \pm \hbar \sqrt{|\Omega_P|^2 + |\Omega_C|^2}$ . Nulinės tikrinės vertės

tikrinė f-ja yra tokia:

$$\psi = \frac{\Omega_C \psi_1 \exp\left(\frac{E_1 t}{i\hbar}\right) - \Omega_P \psi_2 \exp\left(\frac{E_2 t}{i\hbar}\right)}{\sqrt{|\Omega_C|^2 + |\Omega_P|^2}} \quad (2.15)$$

Tokia būseną vadinama „tamsi“, nes, nors ir lazeriai sukuria šuolius į  $\psi_3$  būseną, tačiau ji visiškai neieina į būsenos (2.15) išraišką. Dar reikia atkreipti dėmesį į tai, kad Rabi dažniai  $\Omega_P$  ir  $\Omega_C$  priklauso nuo atomo masės centro padėties  $\mathbf{r}$ , o tuo pačiu ir „tamsi“ būseną priklauso nuo to, kur yra atomas. Todėl, jei norime, kad judant atomui per šviesos pluoštus  $\Omega_P$  ir  $\Omega_C$  jo judėjimą aprašytų lėto judėjimo lygtis (1.17), jis turi judėti pakankamai lėtai, kad elektroninė būseną spėtu pereiti vis į naują „tamsią“ būseną.

## 2.2 Efektyvus magnetinis laukas

Dabar teikdami, kad f-ja (2.15) yra ta pati f-ją  $\chi$  iš 1 skyriaus, galime paskaičiuoti kokius vektorinius ir skaliarinius potencialai atsiranda lėto judėjimo (1.17) lygtyje. Vektorinį potencialą paskaičiavę pagal (1.18) formulę gauname:

$$\mathbf{A} = \frac{i\hbar}{2(|\Omega_P|^2 + |\Omega_C|^2)} \left[ -\Omega_C \nabla \Omega_C^* + \Omega_C^* \nabla \Omega_C - \Omega_P \nabla \Omega_P^* + \Omega_P^* \nabla \Omega_P \right] \quad (2.16)$$

Galime dabar pasinaudodami kalibruotės transformacija, aprašyta 1 skyriuje, pasiekti, kad dydis  $\Omega_C$  būtų tik realus. Tada įvedę tokį žymėjimą:

$$\zeta = \frac{\Omega_P}{\Omega_C} = |\zeta| \exp(iS) \quad (2.17)$$

supaprastiname (2.16) išraišką iki tokios:

$$\mathbf{A} = -\hbar \frac{|\zeta|^2 \nabla S}{1 + |\zeta|^2} \quad (2.18)$$

Galima paskaičiuoti ir efektyvų magnetinį lauką:

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A} = \hbar \frac{\nabla S \times \nabla |\zeta|^2}{(1 + |\zeta|^2)^2} \quad (2.19)$$

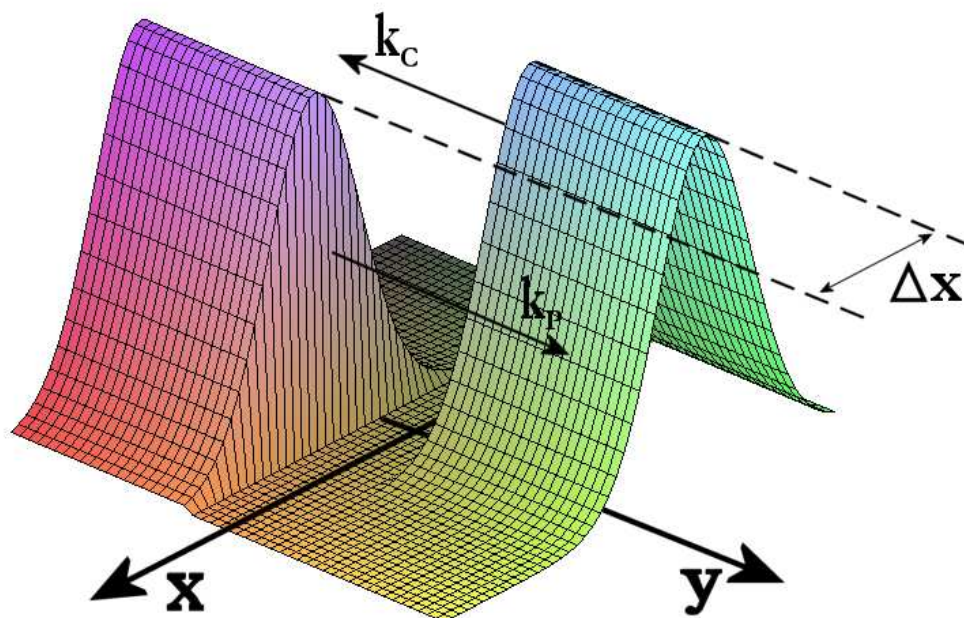
tačiau jis nėra tas pats, kas tikras magnetinis laukas, nes (1.17) lygtyje prie  $\mathbf{A}$  nėra jokio krūvio.

Toliau pasinaudoję (1.19) paskaičiuojame skaliarinį potencialą:

$$\varphi = \frac{\hbar^2}{2M} \cdot \frac{|\zeta|^2 (\nabla S)^2 + (\nabla |\zeta|^2)^2}{(1 + |\zeta|^2)^2} \quad (2.20)$$

## 2.3 Dviejų priešpriešais sklindančių šviesos Gauso pluoštų indukuotas magnetinis laukas

Imkime dabar konkretų pavyzdį. Atomas, esantis „tamsioje“ būsenoje yra veikiamas dviem priešpriešai sklindančiais Gauso pluoštais. Sakysim pluoštai sklinda  $y$  kryptimi (žr. 2 pav.).



2 pav.: Priešpriešais sklindantis šviesos Gauso pluoštai

Elektrinis laukas tokių pluoštų atrodo taip:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_P &= \mathbf{E}_0 \exp\left(-\frac{(x - \Delta x/2)^2}{\sigma^2}\right) \cos(\omega_P t - k_P y) \\ \mathbf{E}_C &= \mathbf{E}_0 \exp\left(-\frac{(x + \Delta x/2)^2}{\sigma^2}\right) \cos(\omega_C t + k_C y) \end{aligned} \quad (2.21)$$

čia  $\Delta x$  - atstumas tarp pluoštų maksimumo padėčių.

Tokių bangų Rabi dažniai bus:

$$\begin{aligned} \Omega_P &= \Omega_0 \exp\left(-\frac{(x - \Delta x/2)^2}{\sigma^2}\right) \exp(ik_P y) \\ \Omega_C &= \Omega_0 \exp\left(-\frac{(x + \Delta x/2)^2}{\sigma^2}\right) \exp(-ik_C y) \end{aligned} \quad (2.22)$$

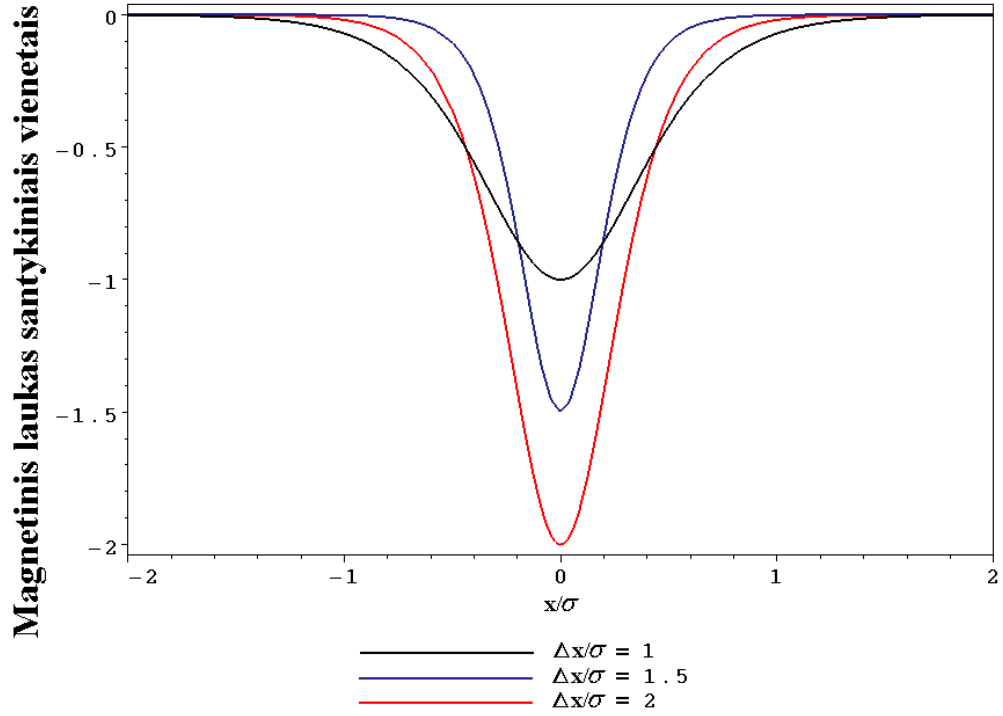
Tuomet skaičiuojame vektorinį ir skaliarinį potencialus, bei efektyvųjį magnetinį lauką:

$$\mathbf{A} = -\frac{\hbar k \exp(x/a)}{1 + \exp(x/a)} \mathbf{n}_y \quad (2.23)$$

$$\mathbf{B} = \frac{-\hbar k \Delta x}{\sigma^2 \cosh^2(x/2a)} \mathbf{n}_z \quad (2.24)$$

$$\varphi = \frac{\hbar^2}{2M} \exp(x/a) \frac{k^2 + 1/(4a^2)}{(1 + \exp(x/a))^2} \quad (2.25)$$

čia  $k = k_P + k_C$ , o  $a = \sigma^2/4\Delta x$ . Magnetinio lauko pasiskirstymą erdvėje paizduoja 3 pav.



3 pav.: Magnetinio lauko, indukuoto dviejų priešpriešais sklindančių Gauso pluoštų, priklausomybė nuo erdvinės koordinatės

## 2.4 Stovinčios ir plokščios bangų indukuotas magnetinis laukas

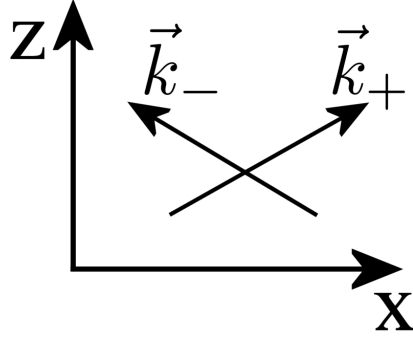
Čia nagrinėsime stovinčios ir plokščios bangų indukuotus potencialus. Stovinti banga padaroma paleidus dvi plokščias bangas priešingomis kryptimis. Paskaičiuokime kokia gausis banga, jei paleisime dvi vienodo dažnio bangas kaip parodyta 4 pav. Bangos vektoriai:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_+ &= k_z \mathbf{n}_z + k_x \mathbf{n}_x \\ \mathbf{k}_- &= k_z \mathbf{n}_z - k_x \mathbf{n}_x \end{aligned} \quad (2.26)$$

Tada bangos elektrinis laukas:

$$\mathbf{E}_P = \mathbf{E}_{P0} \cos(\omega t - k_z z) \cos(k_x x) \quad (2.27)$$

Matome, kad gavome stovinčią bangą išilgai  $x$  ašies, tačiau išilgai  $z$  ašies banga sklinda.



4 pav.: Stovinčios išilgai vienos ašies bangos formavimas

Antras pluoštas, kuriuo veiksime atomą, bus paprasta plokščia banga. Taigi bangų Rabi dažniai:

$$\begin{aligned}\Omega_P &= \Omega_{P0} \cos(k_x x) \exp(ik_z z) \\ \Omega_C &= \Omega_{C0} \exp\left(i\sqrt{k_z^2 + k_x^2} z\right)\end{aligned}\quad (2.28)$$

Dabar skaičiuojame vektorinį potencialą:

$$\mathbf{A} = -\hbar \frac{|\Omega_{P0}|^2 \cos^2(k_x x)}{|\Omega_{C0}|^2 + |\Omega_{P0}|^2 \cos^2(k_x x)} \left(k_z - \sqrt{k_z^2 + k_x^2}\right) \mathbf{n}_z \quad (2.29)$$

Tuomet efektyvus magnetinis laukas bus:

$$\mathbf{B} = \frac{\hbar \left(\sqrt{k_z^2 + k_x^2} - k_z\right) k_x g^2 \sin(2k_x x)}{[g^2 + \cos^2(k_x x)]^2} \mathbf{n}_y \quad (2.30)$$

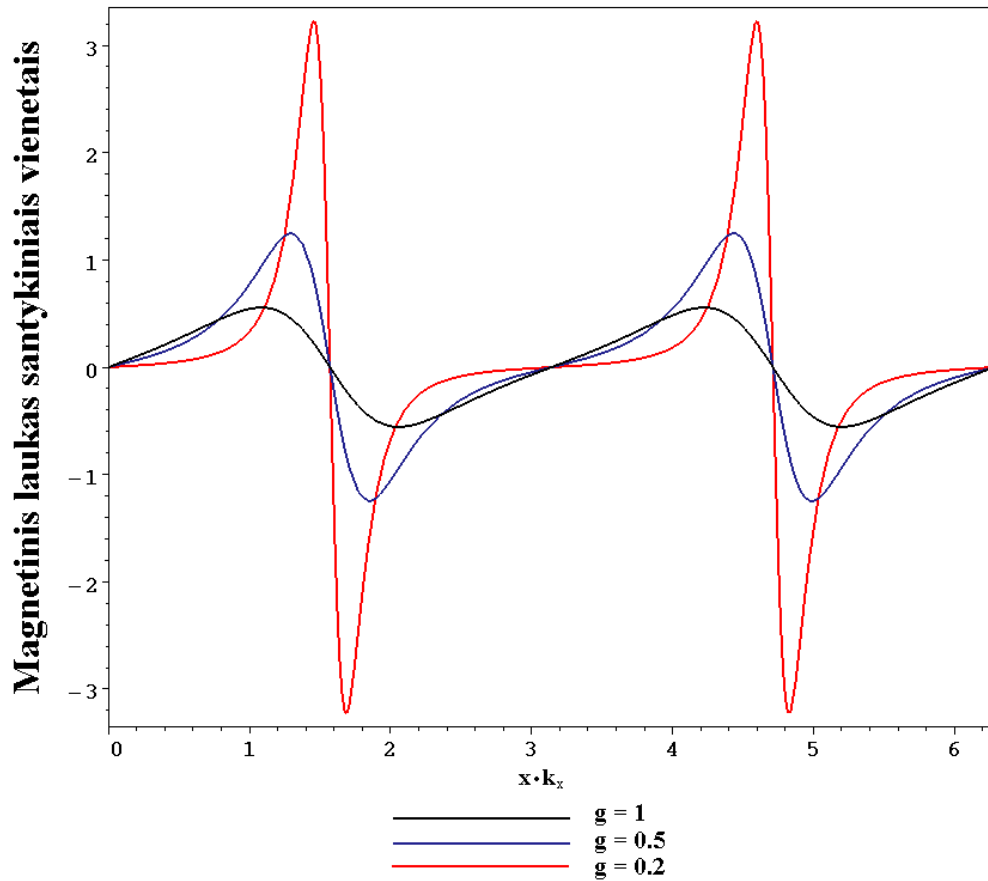
čia įvestas žymėjimas  $g = |\Omega_{C0}|^2 / |\Omega_{P0}|^2$  kuris yra proporcingas plokščios ir stovinčios bangų elektrinių laukų amplitudžių santykiui. 5 pav. patektas grafikas magnetinio lauko santykinės amplitudės su įvairiomis  $g$  vertėmis.

Magnetinis laukas gaunamas periodinis, be to matome, kad kai  $g \rightarrow +0$ , kitaip tariant mažinant plokščios bangos amplitudę, laukas taške  $x/k_x = \pi/2$  išauga į begalybę. Kyla klausimas ar ši begalibė yra fizikine (gali smarkiai įtakoti eksperimentą) ar tai tiesiog matematinis nesklaidumas. Kai pikas auga į begalybę jie pasidaro vis siauresni. Tai klausimas yra kokiu greičiu siaurėja pikas, kai jis auga į begalybę. Siaurėjimo greiti reikėtų lyginti su delta f-jos siaurėjimo greičiu. Jei pikas siaurėja taip, kaip delta f-ja, tai begalybė fizikinė. Jei greičiau siaurėja negu auga į begalybę, tai toks rezultatas eksperimente nebutu pastebimas, ir galima laikyti, kad magnetinis laukas neauga į begalybę. Delta f-ijų seka turi tokią savybę:

$$\lim_{g \rightarrow +0} \int \phi(x) f_g(x) dx = \phi(0) \quad (2.31)$$

čia  $\phi(x)$ - bet kokia toliidi f-ja, o  $f_g(x)$  yra funkcijų seka, kuri artėja prie delta f-jos, kai  $g$  artėja prie nulio. Taigi mums reikia integruoti (2.30) ir ieškoti ribos, kai  $g$  artėja į nulį. Atlikus visą matematiką (jos čia neišrašinėsiu), pastebime, kad (2.30) nėra delta f-ijų seka, todėl begalybė,





5 pav.: Magnetinio lauko erdvinis pasiskirstymas

atsirandanti kai  $g$  artėja į nulį neturi fizikinės prasmės.

## 2.5 Gauso ir pirmos eilės Ermito – Gauso šviesos pluoštų indukuotas magnetinis laukas

Dabar panagrinėkime kokį magnetinį lauką indukuoja du šviesos pluoštai, vienas iš kurių yra Gauso pluoštas, o kitas – pirmos eilės Ermito – Gauso pluoštas. Be to, nagrinėsime tą atvejį, kai pluoštai sklinda priešpriešiais vienas kitam. Panašiai kaip ir (2.21) lygtyse pluoštus aprašys toks elektrinis laukas:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_P &= \mathbf{E}_{P0} x \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \cos(\omega_P t - k_P y) \\
 \mathbf{E}_C &= \mathbf{E}_{C0} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \cos(\omega_C t + k_C y)
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

Tokių pluoštų Rabi dažniai yra:

$$\begin{aligned}
 \Omega_P &= \Omega_{P0} x \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \exp(ik_P y) \\
 \Omega_C &= \Omega_{C0} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \exp(-ik_C y)
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

Čia mums patogiu įvesti žymėjimą  $\Omega_{P0} = A/B$ , o  $\Omega_{C0} = A$ . Nes kaip vėliau pamatysime, mus domins tik Rabi dažnių amplitudžių santykiai. Taigi sunormuoti Rabi dažniai:

$$\begin{aligned}\Omega_P &= \frac{A}{B}x \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \exp(ik_P y) \\ \Omega_C &= A \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \exp(-ik_C y)\end{aligned}\tag{2.34}$$

Dabar pagal (2.18) ir (2.20) skaičiuojame indukuota vektorinį ir skaliarinį potencialus. Vektorinis potencialas gaunasi turintis tik  $y$  komponentę ir priklauso tik nuo  $x$ :

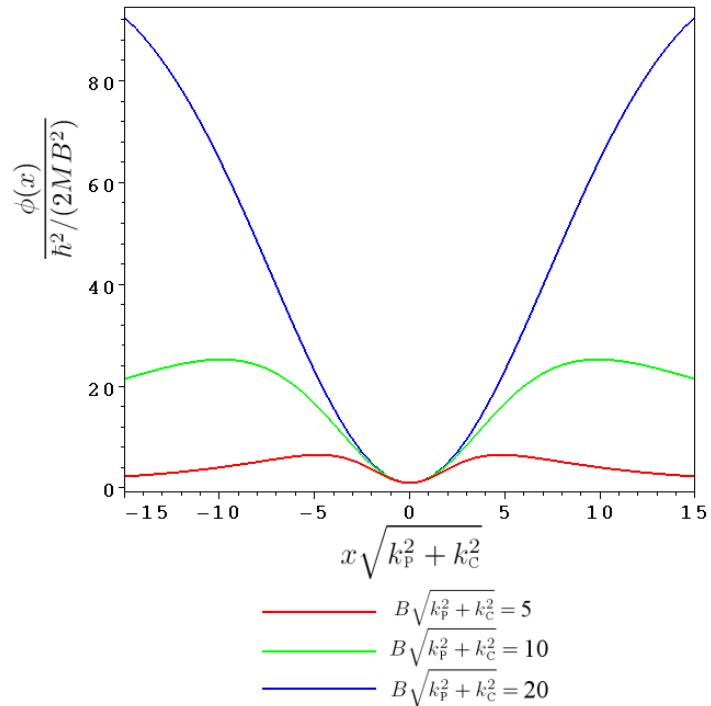
$$\mathbf{A}(x) = A_y(x) \mathbf{n}_y\tag{2.35}$$

$$A_y(x) = \frac{-\hbar(x/B)^2(k_P + k_C)}{1 + (x/B)^2}\tag{2.36}$$

Skaliarinis potencialas priklauso tik nuo  $x$ :

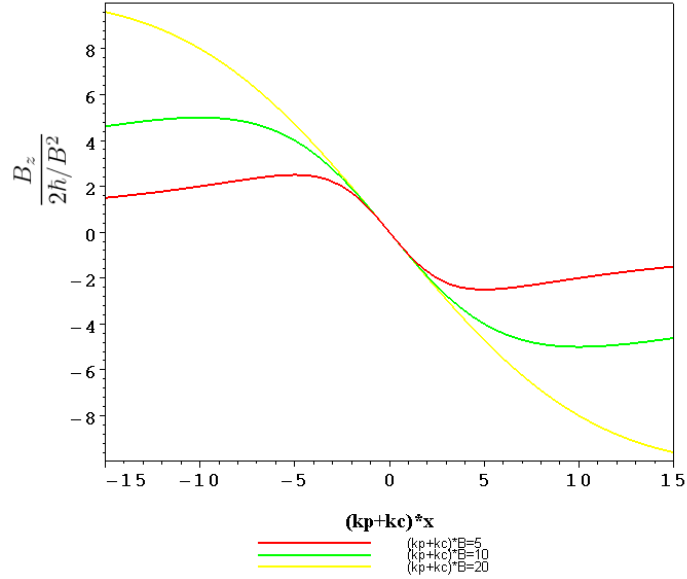
$$\phi(x) = \frac{\hbar^2}{2MB} \cdot \frac{1 + (k_P + k_C)^2 x^2}{[1 + (x/B)]^2}\tag{2.37}$$

Skaliarinio potencialo priklausomybę nuo  $x$  vaizduoja 6 pav.



6 pav.: Skaliarinio potencialo erdvinis pasiskirstymas

Indukuotą magnetinį lauką galima paskaičiuoti pagal (2.19) formulę, tačiau aš išraiškos nerašysiu, o jį tik pavaizduosiu grafiškai (žr. 7 pav.). Magnetinis laukas gaunasi turintis tik  $z$  komponentę, ir priklausantis tik nuo  $x$ .



7 pav.: Magnetinio lauko erdvinis pasiskirstymas

### 3 Kvantinės dalelės judėjimas nevienalyčiame magnetiniame lauke

Jau išnagrinėjome kaip pagrindinės Šredingerio lygties sprendimas suskyla į du uždavinius: greito judėjimo lygties sprendimą, ir lėto judėjimo lygties sprendimą. 2 skyriuje išnagrinėjome greito judėjimo lygties sprendimą, ir atskiriems atvejams suskaičiavome vektorinius ir skaliarinius potencialus, atsirandančius lėto judėjimo lygtyje. Šiame skyriuje nagrinėsime lėto judėjimo lygties (1.17) sprendimą.

Klasikinės dalelės, judėjimo magnetiniame lauke, uždavinys yra sprendžiamas jau gana seniai. Yra žinoma nemažai analitinių išraiškų dalelės trajektorijos, judant įvairių konfigūracijų magnetiniuose laukuose. Kvantinės dalelės judėjimo magnetiniame lauke uždavinys yra žymiai sudėtingesnis. Tokį, judėjimo pastoviam magnetiniame lauke, uždavinį pirmas suformulavo ir išsprendė 1930 m. rusų mokslininkas L. D. Landau. Mus domina judėjimo magnetiniame lauke uždavinys, kad apskaičiuotumėme, kaip atomas judės, indukavus efektyvųjį magnetinį lauką.

Kad rastume dalelės, esančios magnetiniame lauke, banginę f-ją reikia spręsti Šredingerio lygtį su vektoriniu potencialu:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} a(\mathbf{r}, t) = \hat{H} a(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{(-i\hbar \nabla - \mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2}{2M} + \varphi(\mathbf{r}, t) \right] a(\mathbf{r}, t) \quad (3.1)$$

Nagrinėjimą supaprastinsime, laikydami, kad  $\mathbf{A}$  turi tik  $y$  komponentę, kuri priklauso tik nuo  $x$ , taip pat laikysime, kad  $\varphi$  priklauso tik nuo  $x$ . Tokiu atveju magnetinis laukas bus toks:

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}(A_y(x) \mathbf{n}_y) = \frac{\partial A_y(x)}{\partial x} \mathbf{n}_z \quad (3.2)$$

Kadangi magnetinis laukas turi tik  $z$  komponentę, o magnetinė jėga bus statmena  $z$  ašiai,

tai judėjimas išilgai  $z$  ašies mums nėra idomus. Todėl apsiribosime dvimačiu atveju, t.y.  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{n}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{n}_y$ , o  $a = a(x, y, t)$ . Tada išsikeista (3.1) lygtis atrodys taip:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} a(x, y, t) = \left[ \frac{1}{2M} \left( -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2i\hbar A_y(x) \frac{\partial}{\partial y} + A_y^2(x) \right) + \varphi(x) \right] a(x, y, t) \quad (3.3)$$

Lygties (3.3) sprendimo ieškosime tokiu pavidalu:

$$a(x, y, t) = L^{-1/2} \psi_K(x, t) \exp(iKy) \quad (3.4)$$

čia  $L$  yra kvantavimo ilgis išilgai  $y$  ašies. Reikalaujami, kad  $f$ -ja būtų periodinė išilgai  $y$  ašies, uždedame sąlygas bangos vektoriui  $K$ :

$$K = \frac{2\pi j}{L} \quad (3.5)$$

čia  $j$  - sveikas skaičius. Taip pat reikalaujame  $f$ -jos normuotumo:

$$\int |\psi_K(x, t)|^2 dx = 1 \quad (3.6)$$

Dabar įstatę (3.4) į (3.3) gauname lygtį  $f$ -jai  $\psi_K(x, t)$  rasti:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_K = \hat{H}_K \psi_K \quad (3.7)$$

čia  $\hat{H}_K$  yra:

$$\hat{H}_K = \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{(\hbar K - A_y)^2}{2M} + \varphi \right] \quad (3.8)$$

Pasirenkam sprendinį taip:

$$\psi_K(x, t) = \psi_K^n(x) \exp(-i\omega_K^n t) \quad (3.9)$$

Gauname stacionarią Šredingerio lygtį:

$$\hat{H}_K \psi_K^n = \hbar \omega_K^n \psi_K^n \quad (3.10)$$

čia  $n$  yra kvantinis skaičius, kvantuojuantis lygmenis. Reikia atkreipti dėmesį į tai, kad indeksas  $K$  prie dažnio  $\omega_K^n$  reiškia, kad  $\omega_K^n$  priklauso nuo  $K$ . Todėl (3.10) nėra tas pats, kas mums žinoma stacionari Šredingerio lygtis.

Dabar sakykim, kad mus domina dalelės greičio komponentė išilgai  $y$  ašies. Greičio operatorius atrodys taip:

$$\hat{v}_y = \frac{\hat{y}\hat{H} - \hat{H}\hat{y}}{i\hbar} = \frac{-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - A_y(x)}{M} \quad (3.11)$$

Kadangi mes pasirinkome sprendinį (3.4) forma, tai:

$$\hat{v}_y = \frac{\hbar K - A_y(x)}{M} \quad (3.12)$$

Pasinaudojus (3.8) greičio operatorių galime išreikšti taip:

$$\hat{v}_y = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial H_K}{\partial K} \quad (3.13)$$

O vidutinį dalelės greitį galima surasti taip:

$$\langle v_y \rangle = \iint a^* \hat{v}_y a dx dy = \frac{1}{L} \int \psi_K^{n*} \hat{v}_y \psi_K^n dx = \frac{1}{\hbar L} \frac{\partial}{\partial K} \int \psi_K^{n*} \hat{H}_K \psi_K^n dx = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial K} \omega_K^n \quad (3.14)$$

Iš čia matyti, kad dalelė turės greitį išilgai  $y$  krypties tik tuo atveju, kai operatoriaus  $\hat{H}_K$  tikrinė vertė  $\omega_K^n$  priklausys nuo  $K$ . Pavyzdžiui vienalyčio lauko atveju  $\omega_K^n$  nepriklauso nuo  $K$ , todėl dalelė neturės greičio išilgai  $y$  krypties.

Dabar mes panagrinėsime, kaip galima surasti  $\langle v_y \rangle$ , kai magnetinis laukas yra nevienalytis, tačiau erdvėje kinta mažai. Paprastumo dėlei operatoriaus (3.8) antrą ir trečią sumos narius pažymėkime taip:

$$\hat{V}_K(x) = \frac{(\hbar K - A_y(x))^2}{2M} + \varphi(x) \quad (3.15)$$

Sakykim, kad prie fiksuoto  $K$  jis turi minimumą taške  $x = x_K$ , t. y.  $\partial \hat{V}_K(x_K) / \partial x = 0$ . Tada  $x_K$  galima surasti iš sąlygos:

$$-\frac{\hbar K - A_y(x_K)}{M} \frac{\partial A_y(x_K)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(x_K)}{\partial x} = 0 \quad (3.16)$$

Jeigu operatorių  $\hat{V}_K(x)$  skleisti Teiloro eilute taško  $x_K$  aplinkoje ir imti tik tris pirmus narius, tai jis atrodo taip:

$$\hat{V}_K(x) \approx \hat{V}_K(x_K) + \frac{\partial \hat{V}_K(x_K)}{\partial x} (x - x_K) + \frac{\partial^2 \hat{V}_K(x_K)}{\partial x^2} \frac{(x - x_K)^2}{2} = \hat{V}_K(x_K) + \frac{\partial^2 \hat{V}_K(x_K)}{\partial x^2} \frac{(x - x_K)^2}{2} \quad (3.17)$$

Taip išskleistas operatorius  $\hat{V}_K(x)$  atitinka harmoninio osciliatoriaus potencialą. O harmoninio osciliatoriaus lygties sprendiniai yra žinomi (tai Ermito – Gauso polinomiali), bei žinomos tikrinės vertės  $\omega_K^n$ . O žinant  $\omega_K^n$  pagal (3.14) galima rasti greičio išilgai  $y$  ašies operatoriaus vidurkį  $\langle v_y \rangle$ . Dydis  $\langle v_y \rangle$  mus domina, nes eksperimento metu galima matuoti greitį, ir tai yra įrodymas, kad yra sukuriamas efektyvusis magnetinis laukas.

Veliau mes panagrinėsime tikrines vertes  $\omega_K^n$  su konkrečiai užduotomis  $A_y(x)$  ir  $\varphi(x)$  vertėmis, bei suformuluosime sąlygas, kuriom esant galioja (3.17) skleidinys. O dabar panagrinėsime kaip supaprastėja  $\omega_K^n$  ir  $\langle v_y \rangle$  išraiškos, atskiru atveju kai  $\varphi(x) = 0$ , o  $A_y(x)$  yra monotoniškas f-jis. Tada  $\frac{\partial A_y}{\partial x}$  niekada nebus lygi nuliui. Tokiu atveju sąlyga (3.16) taškui  $x_K$  rasti tampa tokia:

$$\hbar K - A_y(x_K) = 0 \quad (3.18)$$

Tada skleidinys (3.17) supaprastėja iki tokio:

$$\hat{V}_K(x) \approx \frac{1}{2M} [B_z(x_K)]^2 (x - x_K)^2 \quad (3.19)$$

čia  $B_z(x_K) = \frac{\partial}{\partial x} A_y(x_K)$  – magnetinio lauko  $z$ - osios komponentės reikšmė minimumo taške  $x_K$ . Esant tokiam operatoriui  $\hat{V}_K(x)$  tikrinių verčių lygtis (3.10) kaip jau minėjau susiveda prie harmoninio osciliatoriaus lygties, kurios tikrinės vertės bus:

$$\omega_K^n = (n + 1/2) B_z(x_K) / M \quad (3.20)$$

Tada pagal (3.14) galime surasti vidutinę greičio projekcijos į  $y$  ašį vertę:

$$\langle v_y \rangle = (n + 1/2) \frac{1}{LM} \frac{\partial}{\partial K} B(x_K(K)) \quad (3.21)$$

### 3.1 Dviejų priešpriešiais sklindančių Gauso pluoštų indukuoto magnetinio lauko įtaka atomo judėjimui

Naudodamiesi 2.3 poskyryje gautais rezultatais, mes čia panagrinėsime atomo judėjimą dviejų priešpriešais sklindančių Gauso pluoštu sukurtame potenciale. Kaip ir 2.3 poskyryje mūsų pluoštai sklis išilgai  $y$  krypties. Tuomet mums tinka šiame skyriuje išnagrinėta teorija. Atomo masės centro judėjimui aprašyti naudosimės (3.10). Šiuo atveju Hamiltonianas yra:

$$\hat{H}_K = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{[\hbar K - A_y(x)]^2}{2M} + \varphi(x) \quad (3.22)$$

čia  $A_y(x)$  imamas iš formulės (2.23), o  $\varphi(x)$  iš formuės (2.25). Taigi pilnai Hamiltonianas užsirašys taip:

$$\hat{H}_K = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2}{2M} \left[ K^2 + (2Kk + k^2) \frac{\exp(x/a)}{1 + \exp(x/a)} + \frac{1}{16 \cosh^2(x/(2a)) a^2} \right] \quad (3.23)$$

Paskutinį narį  $\frac{1}{16 \cosh^2(x/(2a)) a^2}$  iš visos Hamiltoniano išraiškos galima išmesti, nes  $1/a \approx \Delta x / \sigma^2 \approx 1/\sigma < k$ . Taip yra, todėl, kad Gauso pluošto charakteringas plotis yra žymiai didesnis už to pluošto šviesos bangos ilgį. Taigi priminsiu, kad dydis  $K$  yra proporcingas atomo greičio  $y$  dedamajai, o dydis  $k$  yra šviesos pluoštų banginių vektorių suma. Todėl leidžiant atomus į šviesos pluoštus su įvairiom greičio vektorius  $y$  dedamosioms gausim skirtingus hamiltonianus, o tuo pačiu ir skirtingus judėjimus. Panagrinėkim, kaip atrodo efektyvusis potencialas prie įvairių  $K$  verčių. Pirmai įsiveskim tokius bedimensinius dydžius:  $u = K/k$  - atspindi atomo greičio  $y$  dedamąją,  $X = x/a$  - ikso koordinatė normuota į pluoštų charakteringus dydžius.

Dabar perrašykim hamiltonianą (3.23) tokių pavidalu:

$$\hat{H}_K = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \left[ -\frac{1}{a^2 k^2} \frac{d^2}{dX^2} + V_u(X) \right] \quad (3.24)$$

$$V_u(X) = u^2 + (2u + 1) \frac{\exp X}{1 + \exp X} \quad (3.25)$$

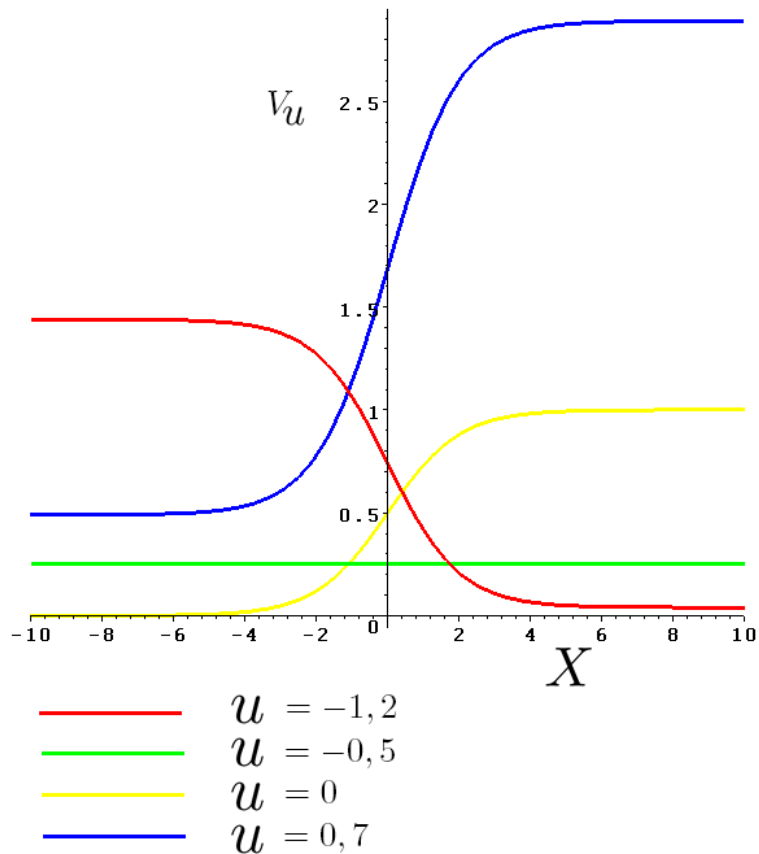
čia hamiltoniano pradžioje iškelėm dydį  $\frac{\hbar^2 k^2}{2M}$ , nes į jį normuosim atomo energiją.

Taigi mus domina kaip atrodo potencialas  $V_u(X)$  prie įvairių  $u$  verčių. Paskaičiuokim asimptotines reikšmes:

$$V_{+\infty} = \lim_{X \rightarrow +\infty} V_u(X) = (u + 1)^2 \quad (3.26)$$

$$V_{-\infty} = \lim_{X \rightarrow -\infty} V_u(X) = u^2 \quad (3.27)$$

Laikom, kad atomai juda iš minus begalybės į plus begalybę. Dabar matom, kad prie  $u = -1/2$  potencialas plus begalybėje ir minus begalybėje sutampa, todėl dalelės energija nepakinta pereinant per šviesos pluoštus. Jei  $u > -1/2$ , tai atomo energija turi sumažėti, jei  $u < -1/2$  tai energija turi padidėti. Potencialas prie įvairių  $u$  verčių yra pavaizduotas 8 pav.



8 pav.: Potencialas prie įvairių parametro verčių

Taigi dabar užrašysime Šredingerio lygtį dalelei potenciale  $V_u(X)$ . Pirmai įvesime bedimen-

sinę energiją  $\varepsilon = E / \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \right)$ . Dabar lygtis atomo masės centro judėjimui užsirašys taip:

$$-\frac{d^2}{dX^2} \psi_u(X) + a^2 k^2 (2u + 1) \frac{\exp X}{1 + \exp X} \psi_u(X) - a^2 k^2 (\varepsilon - u^2) \psi_u(X) = 0 \quad (3.28)$$

Pradžioje sprendinio ieškosime tokiu pavidalu:

$$\psi_u(X) = \begin{cases} c_i \exp(K_i X) + c_r \exp(K_r X) & \text{kai } X \ll 0 \\ c_t \exp(K_t X) & \text{kai } X \gg 0 \\ \rho(X) & \text{kai } X \approx 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

čia  $i$  žymi kritusią,  $r$  - atsispindėjusią, o  $t$  - praėjusią bangas. Įstatę sprendinio formą (3.29) į lygtį (3.28) gauname sąlygas bedimensiniams banginiams vektoriams:

$$K_i = -K_r = ak\sqrt{\varepsilon - u^2} \quad (3.30)$$

$$K_t = ak\sqrt{\varepsilon - (u + 1)^2} \quad (3.31)$$

Taigi jei žiūrėtume į kritusią ir praėjusią bangas, tai dalelės greičio  $x$  dedamoji bus:

$$V_x = \begin{cases} \frac{\hbar k}{M} \sqrt{\varepsilon - u^2} & \text{kai } X \ll 0 \\ \frac{\hbar k}{M} \sqrt{\varepsilon - (u + 1)^2} & \text{kai } X \gg 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

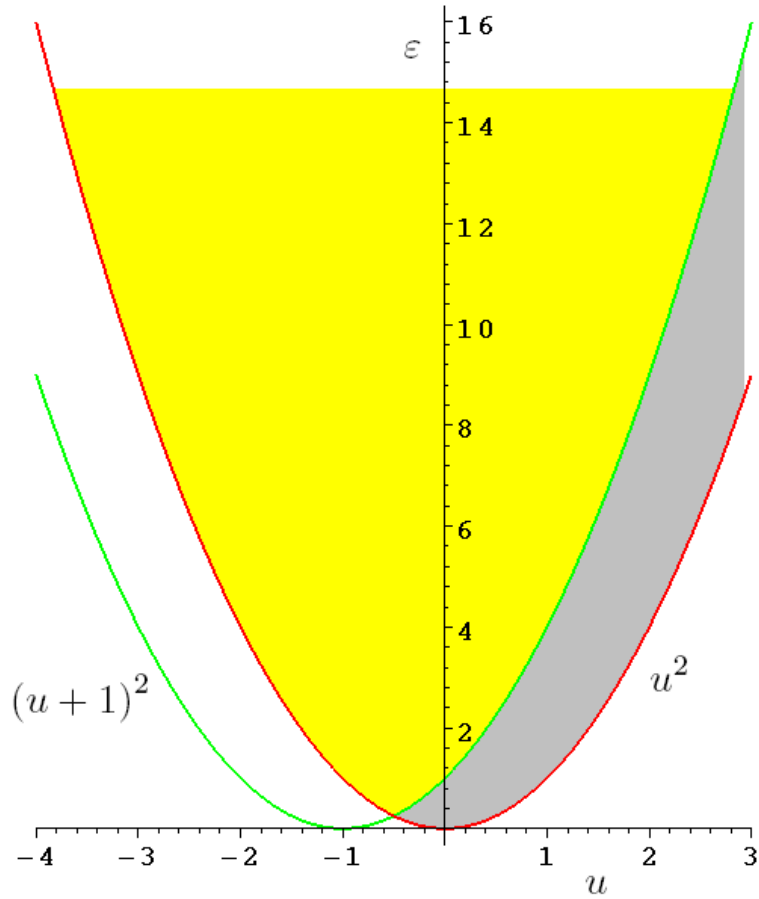
Dabar rasime greičio  $y$  dedamąją. Kaip buvo parodyta greičio  $y$  dedamosios operatorius yra (3.12), o pilna banginė f-ja atrodo (3.4) forma, todėl greičio dedamoji prie fiksuoto  $X$  bus:

$$V_y = \int a^*(X, y) \hat{v}_y a(X, y) dy = \frac{\hbar k}{M} \left( u + \frac{\exp X}{1 + \exp X} \right) \quad (3.33)$$

Matom, kad praėjus šviesos pluoštus kinetinė energija lieka ta pati, nes  $E_k = \frac{M}{2} (V_x^2 + V_y^2) = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \varepsilon$  tiek prie  $X \rightarrow -\infty$ , tiek prie  $X \rightarrow +\infty$ . Taigi praėjus šviesos pluoštus pakinta atomo vidinė būseną, o kinetinė energija nepakinta. Tik persiskirsto tarp  $x$  ir  $y$  kryptių. Užduotai  $\varepsilon$  vertei parametras  $u$  gali kisti tik tam tikrose ribose, nes  $u$  atspindi  $y$  greičio komponentę. Taigi panagrinėsime, kokiose ribose gali kisti  $u$  užduotai  $\varepsilon$  vertei. Dalelė prie pluoštų ateina iš  $-\infty$ , todėl užduotai energijai  $\varepsilon$  parametras  $u$  gali kisti nuo  $-\sqrt{\varepsilon}$  iki  $\sqrt{\varepsilon}$  (žr. (3.32) viršutinę dalį). O jei dalelė praėjo pluoštus, tai parametras  $u$  gali būti nuo  $-\sqrt{\varepsilon} - 1$  iki  $\sqrt{\varepsilon} - 1$  (žr. (3.32) apatinę dalį). Iš čia aišku, kad jei tik  $u$  yra iš intervalo nuo  $\sqrt{\varepsilon} - 1$  iki  $\sqrt{\varepsilon}$ , tai dalelė būtinai atsispindės nuo pluoštų, nes priešingu atveju jos greičio  $y$  komponentės kvadratas viršys kinetinę energiją. Žemiau pateikiamas 9 pav. iliustruoja kokios dalelės praeis šviesos pluoštus, o kokios atsispindės nuo jų.

Žiūrint į bedimensinius banginius vektorius matom, kad jie yra tos pačios eilės, kaip ir dydis  $ak$ . Kadangi  $ak \gg 1$ , tai dalelės de-Broilio bangos ilgis yra mažas lyginant su potencialo (3.25) charakteringuoju pločiu. Reiškia turim kvaziklasikinį atvejį. Taigi galime nesunkiai apytiksliai





9 pav.: Galimos parametro  $u$  vertės prie įvairių kinetinės energijos verčių. Geltona spalva žymi galimas  $u$  vertes, kai dalelė praeina šviesos pluoštus, o pilka spalva žymi galimas parametro  $u$  vertes, kai dalelė atsispindi nuo jų.

surasti banginę f-ją (žr. [2]). Jos ieškosime tokiu pavidalu:

$$\psi_u(X) = \exp(iak\sigma(X)) \quad (3.34)$$

(3.34) įstatę į (3.28) gauname lygtį f-jai  $\sigma(X)$ :

$$-(\sigma')^2 + \frac{i}{ak}\sigma'' + \left[ \varepsilon - u^2 - (2u + 1) \frac{\exp X}{1 + \exp X} \right] = 0 \quad (3.35)$$

F-ja  $\sigma(X)$  skleisime  $\frac{1}{ak}$  laipsniais, ir pagal trikdžių teoriją ieškosime nulinės ir pirmos pataisos:

$$\sigma(X) = \sigma_0(X) + \frac{\sigma_1(X)}{ak} + \frac{\sigma_2(X)}{(ak)^2} + \dots \quad (3.36)$$

Taigi (3.36) įstatę į (3.35), nulinei pataisai gauname:

$$(\sigma'_0)^2 = \varepsilon - u^2 - (2u + 1) \frac{\exp X}{1 + \exp X} \quad (3.37)$$

Paskutinės lygties dešinėje pusėje esantis dydis turi lokalaus impulso kvadrato prasmę, todėl

įvesime tokį žymėjimą:

$$p(X) = \sqrt{\varepsilon - u^2 - (2u + 1) \frac{\exp X}{1 + \exp X}} \quad (3.38)$$

Tuomet

$$\sigma_0 = \int p(X) dX \quad (3.39)$$

Paskutinis integralas integruojamas analiziškai, tačiau turi pakankamai sudėtingą išraišką. Įveskim žymėjimą  $B = \frac{\varepsilon - u^2}{\varepsilon - (u+1)^2}$ . Tada:

$$\begin{aligned} \sigma_0 = & \sqrt{\varepsilon - u^2} \left[ X - \ln \left( 2B + (B + 1) \exp X + 2\sqrt{B} \sqrt{1 + \exp X} \sqrt{B + \exp X} \right) \right] + \\ & + \sqrt{\varepsilon - (u + 1)^2} \ln \left( B + 1 + 2 \exp X + 2\sqrt{1 + \exp X} \sqrt{B + \exp X} \right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Toliau pirmai pataisai gauname lygtį:

$$\sigma'_1 = \frac{i\sigma_0''}{2\sigma_0'} \quad (3.41)$$

Iš jos  $\sigma_1 = \frac{i}{2} \ln \sigma_0' = \frac{i}{2} \ln p(X)$ . Taigi žinant nulinę ir pirmą pataisą, banginė f-ja užsirašo taip:

$$\psi_u(X) = C \left( \varepsilon - u^2 - (2u + 1) \frac{\exp X}{1 + \exp X} \right)^{-\frac{1}{4}} \exp(iak\sigma_0(X)) \quad (3.42)$$

Dabar ieškosime, kokį dalelė įgyja fazės poslinkį praėjus pluoštus.  $\sigma_0$  asimptotinės išraiškos yra tokios:

$$\sigma_{0, X \rightarrow +\infty} \approx \sqrt{\varepsilon - (u + 1)^2} X + 2\sqrt{\varepsilon - (u + 1)^2} \left[ \ln 2 - \sqrt{B} \ln(\sqrt{B} + 1) \right] = \sqrt{\varepsilon - (u + 1)^2} X + \alpha_2 \quad (3.43)$$

$$\sigma_{0, X \rightarrow -\infty} \approx \sqrt{\varepsilon - u^2} X + \sqrt{\varepsilon - (u + 1)^2} \left[ 2 \ln(\sqrt{B} + 1) - 2\sqrt{B} \ln 2 - \sqrt{B} \ln B \right] = \sqrt{\varepsilon - u^2} X + \alpha_1 \quad (3.44)$$

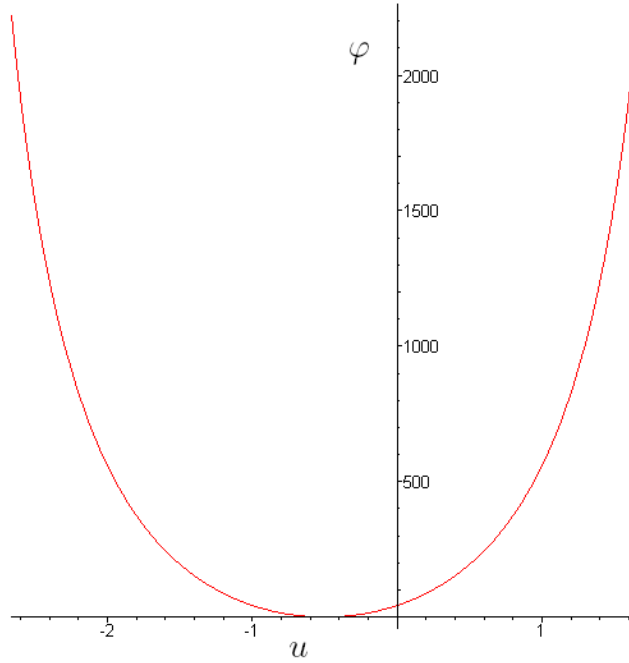
Taigi fazės poslinkis, kurį įgyja dalelė praėjus šviesos pluoštus:

$$\varphi = ak(\alpha_2 - \alpha_1) = ak\sqrt{\varepsilon - (u + 1)^2} \left[ 2(1 + \sqrt{B}) \left( \ln 2 - \ln(\sqrt{B} + 1) \right) + \sqrt{B} \ln B \right] \quad (3.45)$$

Žemiau 10 pav. yra pavaizduota fazės poslinkio priklausomybė nuo parametro  $u$ .

### 3.2 Gauso ir pirmos eilės Ermito – Gauso pluoštų indukuoto magnetinio lauko įtaka atomo judėjimui

Poskyryje 2.5 mes suskaičiavom kokį skaliarinį (žr. (2.37) formulę) ir vektorinį (žr. (2.36) formulę) potencialą indukuoja Gauso ir pirmos eilės Ermito – Gauso pluoštai. Šio skyriaus pradžioje mes parodėme, kad jei indukuotas magnetinis laukas nevienalytis, tai toks laukas



10 pav.: Fazės poslinkis esant užduotiems parametrms  $\varepsilon = 10$  ir  $ak = 10^4$

gali sukelti atomo judėjimą (pagal (3.14) matom, kad greičio dedamosios vidurkis  $\langle v_y \rangle$  gali būti nelygus nuliui). Dabar mes panagrinėsime detaliau operatorių  $\hat{V}_K(x)$  (žr. (3.15) pažymėjimą), jo skleidinį (3.17), bei suformuluosime sąlygas, kada skleidinys galioja.

Taigi operatoriaus  $\hat{V}_K(x)$  išraiška, tuo atveju, kai skaliarinį ir vektorinį potencialus sukelia minėti šviesos pluoštai, bus:

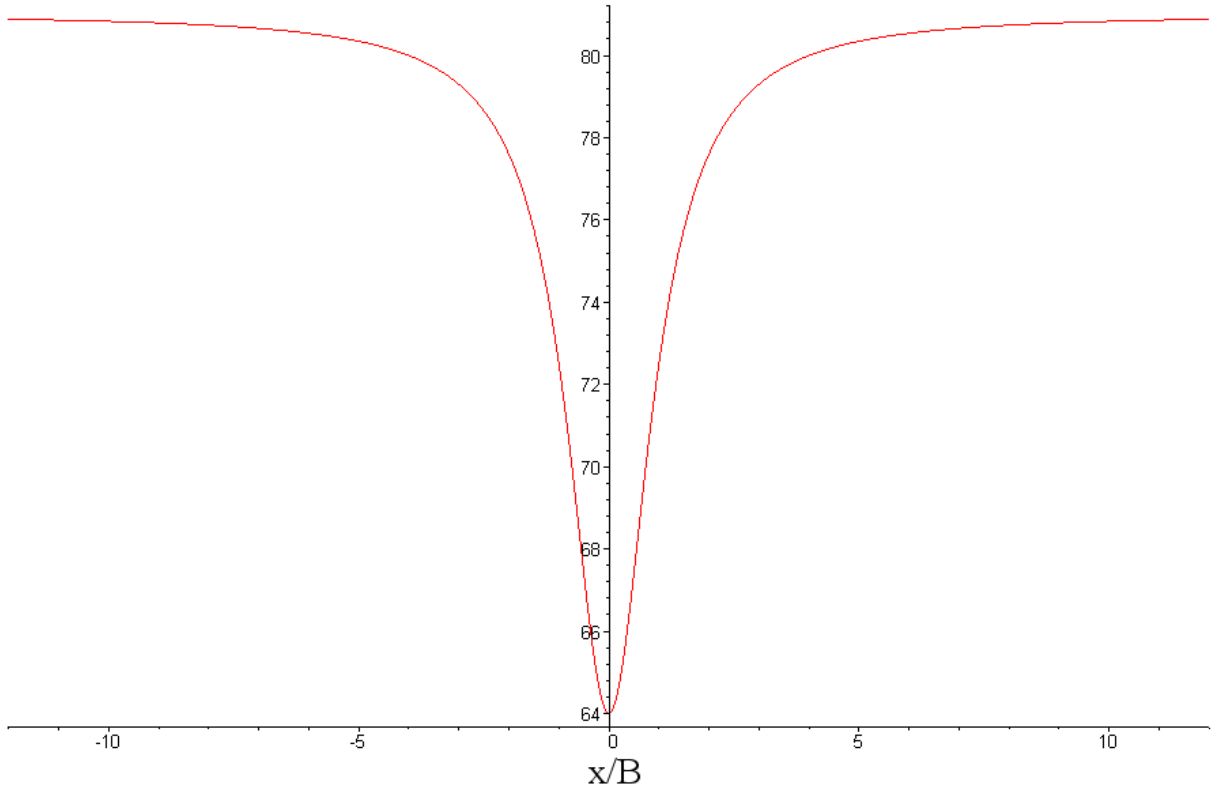
$$\hat{V}_K(x) = \frac{\hbar^2}{2M [1 + (x/B)^2]} \left[ (K + k_P + k_C)^2 (x/B)^2 + K^2 + \frac{1}{B^2 [1 + (x/B)^2]} \right] \quad (3.46)$$

Operatorius  $\hat{V}_K(x)$  nuo  $K$  priklauso kaip nuo parametro. Mus domina tik tokios  $K$  parametro reikšmės, kai  $\hat{V}_K(x)$  turi vieną minimumą. Tai uždeda  $K$  parametrui tokią sąlygą:

$$K > -\frac{k_P + k_C}{2} + \frac{1}{B^2 (k_P + k_C)} \quad (3.47)$$

Priešingu atveju f-ja (3.46) turės vieną maksimumą arba du minimumus. Dviejų minimumu atvejis mus nedomina, nes barjeras tarp minimumų yra pakankamai mažas ir nėra prasmės skleisti (3.46) f-ja minimumo aplinkoje, nes atomas pereidinės iš vieno minimumo į kitą.

Kad būtų aiškiau 11 pav. pavaizduota f-ja (3.46) esant konkretiems parametrų reikšmėms (horizontali ašis normuota į  $B$  vienetus). Matom, kad f-ja panaši į parabolę, kai  $x/B$  artimas nuliui. Mes galim potencialą aproksimuoti parabole tik tuo atveju, jei parabolinės aproksimacijos sprendinys (harmoninio osciliatoriaus uždavinio sprendinys) pasidaro beveik lygus nuliui prie tokių  $x$  reikšmių, kai parabolinė aproksimacija pradeda daug skirtis nuo tikro potencialo. Tokiu atveju dalelė nesuvoks, kad yra neparaboliniame potenciale. Tokie reikalavimai, kaip



11 pav.: Funkcija  $\hat{V}_K(x)$ , esant konkrečioms parametrų reikšmėms

vėliau pamatysime uždės papildomą sąlygą parametrui  $K$ .

Pradžioje suraskime potencinės duobės gylį:

$$g = \lim_{x \rightarrow \infty} \hat{V}_K(x) - \hat{V}_K(0) = \frac{\hbar^2}{2M} \left[ (K + k_P + k_C)^2 + K^2 + \frac{1}{B^2} \right] \quad (3.48)$$

Dabar potencialą (3.46) skleidžiame nulinio aplinkoje:

$$\hat{V}_K(x) \approx \frac{\hbar^2}{2M} \left[ K^2 + \frac{1}{B^2} \right] + \frac{\hbar^2}{2M} \left[ \frac{(2K + k_P + k_C)(k_P + k_C)}{B^2} - \frac{2}{B^4} \right] x^2 = \tilde{V}_K(x) \quad (3.49)$$

Taigi skirtumas tarp skleidinio ir tikro potencialo yra:

$$\Delta(x) = \hat{V}_K(x) - \tilde{V}_K(x) = \frac{\hbar^2}{2M} \left\{ \frac{1}{B^2} \left[ 2 - \frac{1}{1 + (x/B)^2} \right] + (k_P + k_C)(2K + k_P + k_C) \frac{(x/B)^2}{1 + (x/B)^2} \right\} (x/B)^2 \quad (3.50)$$

Harmoninio osciliatoriaus uždavinio sprendinio žemiausia būseną  $\psi_K^{(0)}(x) \sim \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$  yra Gauso f-ja, kurios charakteringas plotis yra:

$$\left(\frac{\sigma}{B}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{(k_P + k_C)(2K + k_P + k_C)B^2 - 2}} \quad (3.51)$$

Dabar panagrinėsime kokioms  $K$  reikšmėms yra tenkinama sąlyga  $\Delta(x = \sigma)/g \ll 1$  t. y. kokioms  $K$  reikšmėms potencialą  $\hat{V}_K(x)$  galima aproksimuoti parabole. Priminsiu, kad  $K$  negali būti labai neigiamas, nes galioja (3.47) sąlyga.

Jei paimsime ribinę vertę ( $K = -\frac{k_P+k_C}{2} + \frac{1}{B^2(k_P+k_C)}$ ) tai  $\Delta \rightarrow +\infty$ . Taigi ribinės  $K$  vertės netinka.

Jei paimsime  $K \approx 0$  tai

$$\left(\frac{\sigma}{B}\right)^2 \approx \frac{1}{B(k_P+k_C)} \Rightarrow \frac{\Delta(x=\sigma)}{g} = \frac{1}{B(k_P+k_C)[B(k_P+k_C)-1]} \ll 1 \quad (3.52)$$

todėl, kad sandaugą  $B(k_P+k_C) \gg 1$ . O sandauga yra žymiai didesnė už vienetą, nes  $B$  pagal savo fizikinę prasmę yra charakteringas pirmos eilės Ermito – Gauso pluošto plotis. O charakteringas šviesos pluošto plotis turi būti žymiai didesnis už šviesos bangos ilgi, priešingai pluoštas išplis dėl difrakcijos.

Jei paimsime labai didelę  $K$  reikšmę lyginant su  $(k_P+k_C)$  reikšme, tai:

$$\left(\frac{\sigma}{B}\right)^2 \approx \frac{1}{B\sqrt{2K(k_P+k_C)}} \Rightarrow \frac{\Delta(x=\sigma)}{g} = \frac{1}{2B^2K(k_P+k_C) + B^2(k_P+k_C)^2 - 1} \ll 1 \quad (3.53)$$

Taigi parabolini artėjimą galima taikyti tada, kai  $K \in [0, +\infty)$ .

Taikant parabolinį artėjimą dažnis  $\omega_K^n$  (jis yra tikrinė hamiltoniano vertė žr. (3.10)) išsireiškia taip:

$$\omega_K^n = \frac{\hbar}{2M} \left[ K^2 + \frac{1}{B^2} \right] + \frac{\hbar}{2M} \sqrt{\frac{k_P+k_C}{B^2} \left[ 2K + k_P + k_C - \frac{2}{B^2(k_P+k_C)} \right]} \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \quad (3.54)$$

Svarbus rezultatas yra tas, kad  $\omega_K^n$  priklauso nuo  $K$ , ir todėl  $\langle v_y \rangle$  apskaičiuota pagal (3.14) nebus lygi nuliui, t. y. eksperimento metu matysime atomų judėjimą.

## Išvados

- Išnagrinėjus atomo, kaip sudedamos dalelės, turinčios vidinius laisvės laipsnius (elektronų būsenos), judėjimą išoriniame potenciale priėjom išvadą, kad jo judėjimas, jei tik elektronų būseną nekinta pakankamai ilgą laiko tarpą, gali būti panašus į įelektrintos dalelės judėjimą magnetiniame lauke.
- Veikiant dviem rezonansiniais šviesos pluoštais  $\Lambda$ -tipo atomą, jo elektronai išliks toje pačioje būsenoje pakankamai ilgą laiko tarpą. Tokiu būdu galima sukurti efektyvų magnetinį lauką.
- Darbe išnagrinėtas dviejų priešpriešiais sklindančių Gauso pluoštų (poskyris 2.3), stovinčios ir plokščios bangos (poskyris 2.4), taip pat pirmos eilės Ermito – Gauso ir Gauso pluoštų (poskyris 2.5) sukurti efektyvūs magnetiniai laukai. Jie gali būti pakankamai stiprus (turima omeny, kad Landau orbitos spindulys yra žymiai mažesnis už sistemos matmenys), todėl atominėse dujose gali pasireikšti elektronų teorijoje žinomų magnetinių efektų analogai.
- Detaliai panagrinėjus dalelės judėjimą per Gauso pluoštus, suformulavom, kokios turi būti energijos, kad dalelė praeitu pro pluoštus, ir kokios energijos, kad atsispindėtų nuo jų (žr. 9 pav.). Taip pat gavom analizinę išraišką fazės poslinkiui (3.45), kurį įgyja dalelė praėjusi pro pluoštus. Šis parametras gali būti matuojamas eksperimentiškai.

## Literatūra

- [1] Bandzaitis A., Grabauskas D. *Kvantinė mechanika*. Vilnius: Mokslas, 1975. 320 p.
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Квантовая Механика (нерелятивистская теория)*. Москва: Наука, 1989. 768 с.
- [3] Meistre P. *Atom Optics*. New York: Springer Verlag, 2001. 312 p.
- [4] Ruseckas J., Juzeliūnas G., Ohberg P. ir Fleischhauer M. *Non-Abelian Gauge Potentials for Ultracold Atoms with Degenerate Dark States*, Phys.Rev.Lett. **95**, 010404 (2005).
- [5] Juzeliūnas G., Ruseckas J. ir Ohber P. *Effective magnetic fields induced by EIT in ultracold atomic gases*, J. Phys. B. **38**, 4171 (2005).
- [6] Barnett S. M. ir Radmore P. M. *Methods in Theoretical Quantum Optics*. Oxford: Clarendon Press, 1997. 284 p.

## Santrauka

Darbe išnagrinėtas atomo judėjimas išoriniame lauke. Dėl išorinio lauko poveikio į elektronų judėjimą, atomas gali judėti taip, lyg jis būtų įelektrinta dalelė, judanti išoriniame magnetiniame lauke. Taip judės atomas tada, kai pradinė elektroninė būseną bus tikrinė išorinio lauko hamiltonianui, bei būseną išliks tikrinė atomui judant erdvėje. Darbe parodyta, kad tuo atveju lygtis atomo masės centro judėjimui rasti bus (1.17).

Darbe taip pat išnagrinėti konkretūs išorinio lauko atvejai, t. y. kai išorinį poveikį atomui daro monochromatiniai šviesos pluoštai. Pirmu atveju buvo imami du Gauso pluoštai. Šiuo atveju sukurto efektyviojo magnetinio lauko erdvinį pasiskirstymą vaizduoja 3 pav. Antru atveju buvo paimta stovinti ir plokščia bangos. Šiuo atveju sukurto efektyviojo magnetinio lauko erdvinį pasiskirstymą vaizduoja 5 pav. Trečiu atveju buvo imamas pirmos eilės Ermito – Gauso ir Gauso pluoštai. Šiuo atveju sukurto efektyviojo magnetinio lauko erdvinį pasiskirstymą vaizduoja 7 pav.

Darbe taip pat yra detaliam išnagrinėtas kvantinės dalelės judėjimas Gauso pluoštų sukurtame potenciale. Gauta analizinė fazės poslinkio išraiška (3.45). Šis dydis yra svarbus, nes jis gali būti matuojamas eksperimentiškai.



# Summary

## INFLUENCE OF ARTIFICIAL MAGNETIC FIELD ON ULTRACOLD ATOMS

Viktor Novičenko

In this work we consider the atomic centre of mass motion in laser fields. The external fields act on electrons of the atom and alter their motion. This influences the atomic centre of mass motion making the atoms to move similar to the motion of an electric particle in the magnetic field. This is the case when the state-vectors of electrons remain the eigenstates of the Hamiltonian during the atomic centre of mass motion. It is shown that the equation for atom mass center motion is then given by equation (1.17).

Subsequently the atomic motion has been studied for the particular monochromatic light beams. In the first case we take counterpropagating Gaussian beams. The corresponding effective magnetic field is shown in 3 pav. In the second case we take a standing wave and a plane wave. In this case the effective magnetic field is shown in 5 pav. In the third case we take the first order Hermite – Gaussian and Gaussian beams. The corresponding effective magnetic field is shown in 7 pav.

The results have been applied to study the atomic motion of a quantum particle in the effective magnetic field induced by shifted counterpropagating Gaussian beams. We get an analytical formula (3.45) to calculate phase shift. This result is important, because the phase shift can be measured in experiments.