FIZIKINIŲ IR TECHOLOGIJOS MOKSLŲ
CENTRAS
Puslaidininkių fizikos institutas, Vilnius, Lietuva

FizTeCh 2011

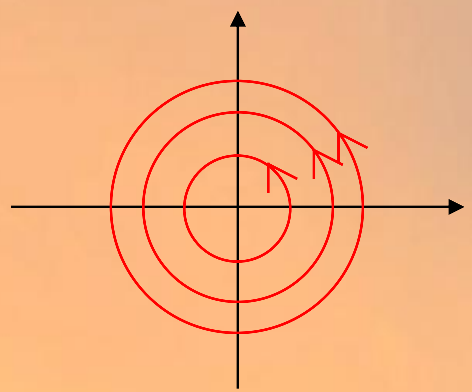
Fazės redukcija silpnai perturbuotiems ribinio ciklo osciliatoriams su delsos nariais

Viktor Novičenko ir Kęstutis Pyragas

Fazės redukcija silpnai perturbuotiems ribinio ciklo osciliatoriams su delsos nariais

Osciliatorius - bet kuri sistema vaizduojanti periodinį sprendinį. Pavyzdys: Žemes ir Saulės sistema, Žemė aplink Saulę apsisuka per vienerius metus.

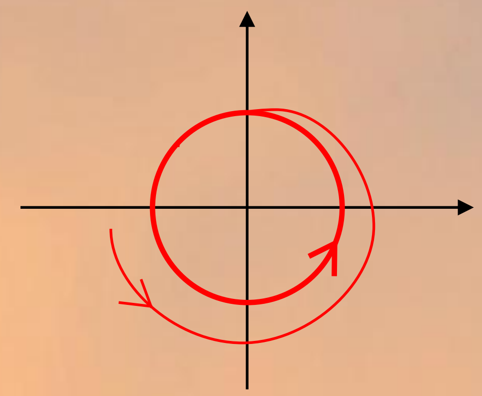
Tiesinis osciliatorius:



Lygtis aprašanti osciliatorių be delsos narių:

$$\dot{X} = F(X(t))$$

Ribinio ciklo osciliatorius:



Lygtis aprašanti osciliatorių su delsos nariais:

$$\dot{X} = F(X(t), X(t-\tau))$$

Fazės redukcija

Fazės redukcija yra efektyvus įrankis skirtas analizuoti silpnai perturbuotus ribinio ciklo osciliatorius.

Daugiausia tyrimų fazės redukcijos srityje yra atlikta, kai dinaminės sistemos yra aprašomos paprastomis diferencialinėmis lygtimis (PDL).

Mūsų tikslas išplėsti fazės redukcijos metodą dinaminėms sistemoms aprašomoms lygtimis su delsa.

Fazės redukcija 2

Tarkim turim dinaminę sistemą su stabiliu ribiniu ciklu.

Kiekvienai būsenai ant ribinio ciklo ir šalia ribinio ciklo priskiriam skaliarinį kintamąjį (FAZĖ).

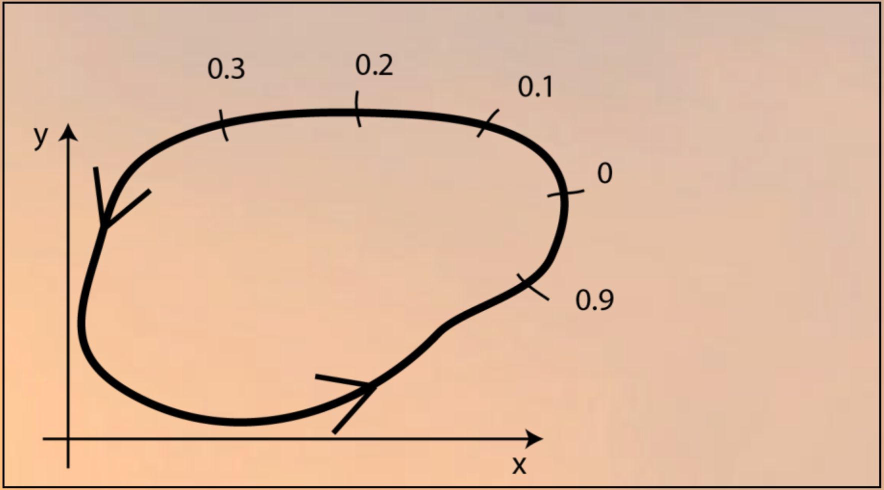
Laisvos sistemos fazė tenkina dėsnį:

$$\boxed{\dot{\varphi} = 1}$$

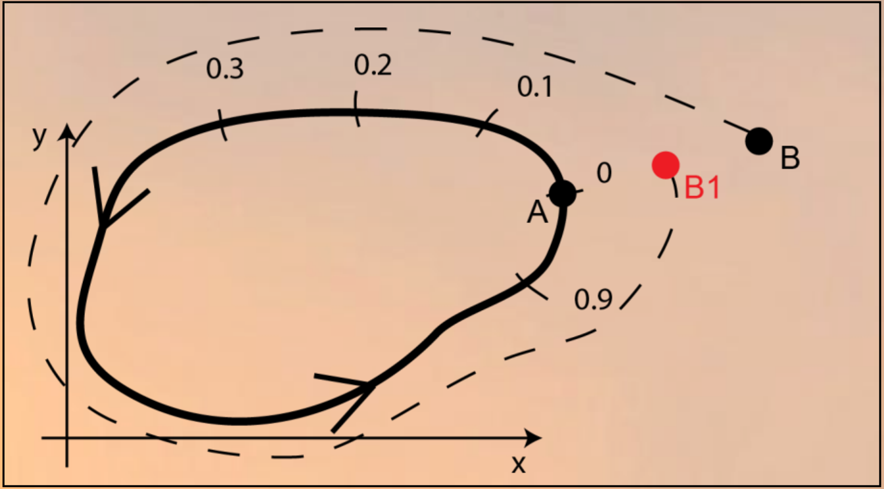
Paveikim sistemą išoriniu trikdžiu.
Fazės redukcijos metodo tikslas yra rasti lygtį aprašančia perturbuotos sistemos fazę:

$$\boxed{\dot{\varphi} = ?}$$

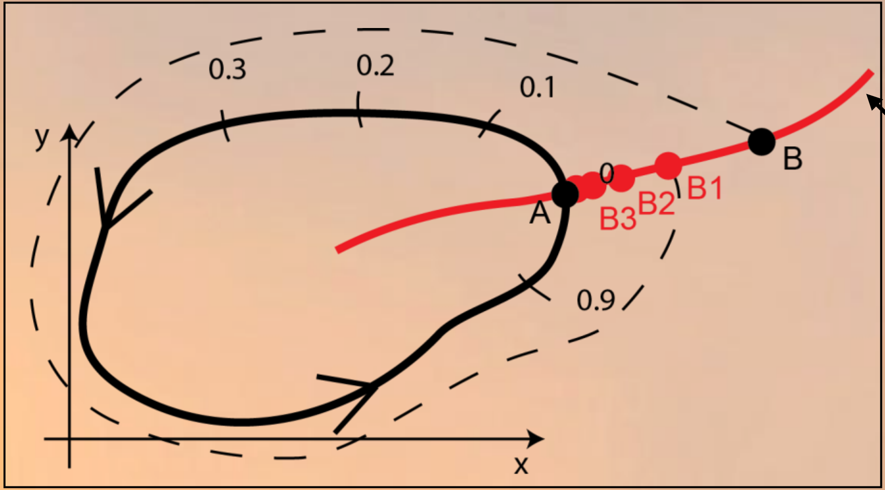
Fazės redukcija PDL sistemom



Fazės redukcija PDL sistemom



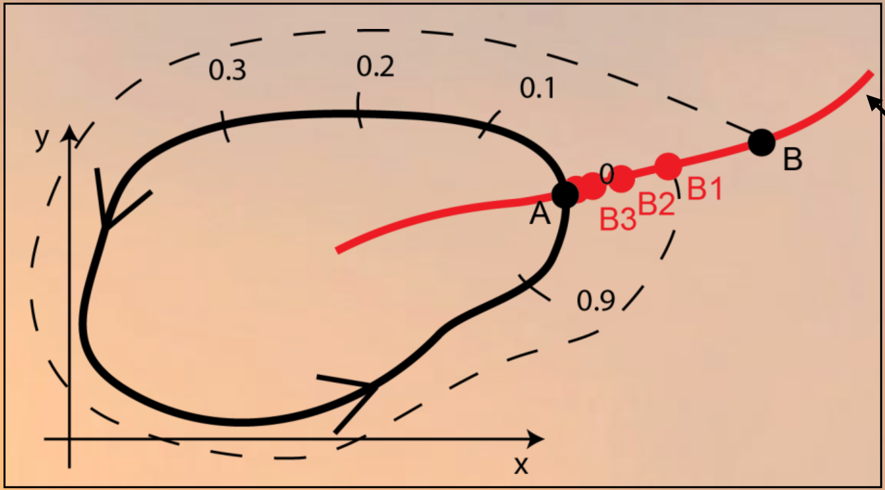
Fazės redukcija PDL sistemom



$$\varphi_B = \varphi_A$$

Izochrona – vienodos fazės būsenų aibė.

Fazės redukcija PDL sistemom



$$\varphi_B = \varphi_A$$

Izochrona – vienodos fazės būsenų aibė.

Malkino tyrimai:

Malkin, I.G.: Some Problems in Nonlinear Oscillation Theory.Gostexizdat, Moscow (1956)

Perturbuota sistema: $\boxed{\dot{y} = G(y) + \varepsilon\phi(t)}$

Fazės dimanika: $\boxed{\dot{\varphi} = 1 + \varepsilon z(\varphi)^T \phi(t)}$,čia $z(\varphi)$ yra periodinė vektorinė funkcija - fazės atsako funkcija (FAF)

FAF yra periodinis sprendinys jungtinės lygties: $\boxed{\dot{z} = -[DG(y_c)]^T z}$

Tenkinantis pradines sąlygas: $\boxed{z^T(0)\dot{y}_c(0) = 1}$

Fazės redukcija sistemom su delsa

Perturbuota sistema: $\boxed{\dot{x} = F\big(x(t), x(t-\tau)\big) + \varepsilon\psi(t)}$

Aproksimacija naudojant delsos linija:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{x} = F\big(x(t), \xi(\tau, t)\big) + \varepsilon\psi(t) \\ \dfrac{\partial \xi(s,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial \xi(s,t)}{\partial s}, \xi(0,t) = x(t) \end{array}}$$

Diskretizuojam erdvinį kintamąjį: $s_i = i\tau / N, \quad i = 0,..,N$

Pažymim $x_0(t) = x(t)$ ir $x_i(t) = \xi(s_i, t)$

Mes gaunam baigtinės dimensijos PDL sistemą:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{x}_0 = F\big(x_0(t), x_N(t)\big) + \varepsilon\psi(t) \\ \dot{x}_1 = \big[x_0(t) - x_1(t)\big] N / \tau \\ \ldots \\ \dot{x}_N = \big[x_{N-1}(t) - x_N(t)\big] N / \tau \end{array}}$$

Fazės redukcija sistemom su delsa: rezultatai

Fazės dinamika: $\boxed{\dot{\varphi} = 1 + \varepsilon z^T(\varphi)\psi(t)}$

Jungtinė lygtis dėl FAF: $\boxed{\dot{z} = -A^T(t)z(t) - B^T(t+\tau)z(t+\tau)}$

čia:

$$\boxed{\begin{aligned} A(t) &= D_1F\big(x_c(t), x_c(t-\tau)\big) \\ B(t) &= D_2F\big(x_c(t), x_c(t-\tau)\big) \end{aligned}}$$

Pradinės sąlygos:

$$\boxed{z^T(0)\dot{x}_c(0) + \int_{-\tau}^{0} z^T(\tau+\vartheta)B(\tau+\vartheta)\dot{x}_c(\tau+\vartheta)\,d\vartheta = 1}$$

Pavyzdys: Mackey-Glass lygtis

Neperturbuota lygtis: $$\frac{dx}{dt} = \frac{ax(t-\tau)}{1+x^b(t-\tau)} - x(t)$$

Dvi skirtingos pradinės sąlygos: pirma ant ribinio ciklo ir antra Perturbuota per dydį ε nuo pirmos.

$$\chi(\varphi+\vartheta) = \begin{cases} x_c(\varphi)+\varepsilon & \text{kai } \boxed{\vartheta = 0} \\ x_c(\varphi+\vartheta) & \text{kai } \boxed{\vartheta \in [-\tau, 0)} \end{cases}$$

Fazės atsako funkcija:

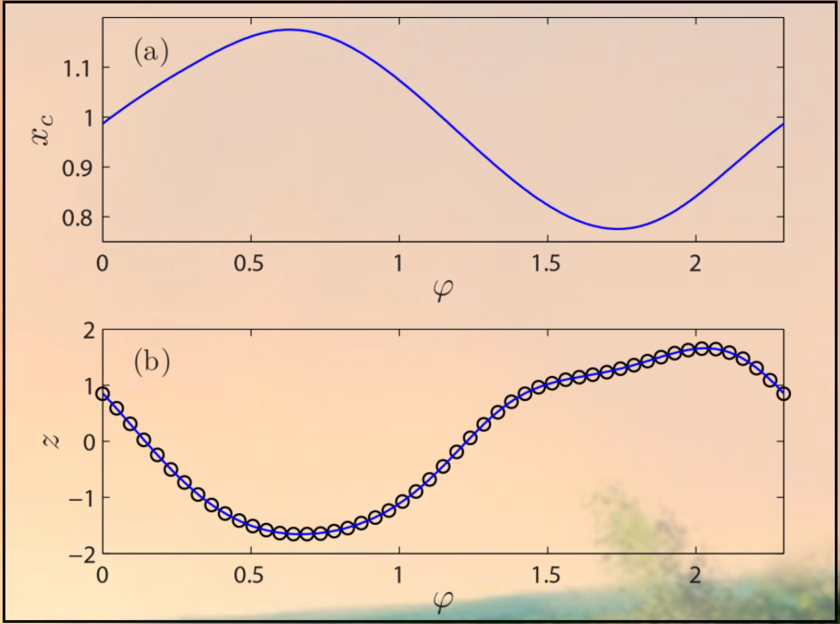
$$z(\varphi) = \Delta t / \varepsilon$$

$a = 2$

$b = 10$

$\tau = 0.7$

$\varepsilon = 10^{-5}$



Pavyzdys: Mackey-Glass lygtis

Perturbacija naudojant periodinį išorinį signalą:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a x(t-\tau)}{1 + x^b(t-\tau)} - x(t) + \varepsilon\psi(t)$$

čia

$$\psi(t) = \begin{cases} \sin(2\pi\upsilon t) \\ sign[\sin(2\pi\upsilon t)] \end{cases}$$

Dažnio išderinimas:

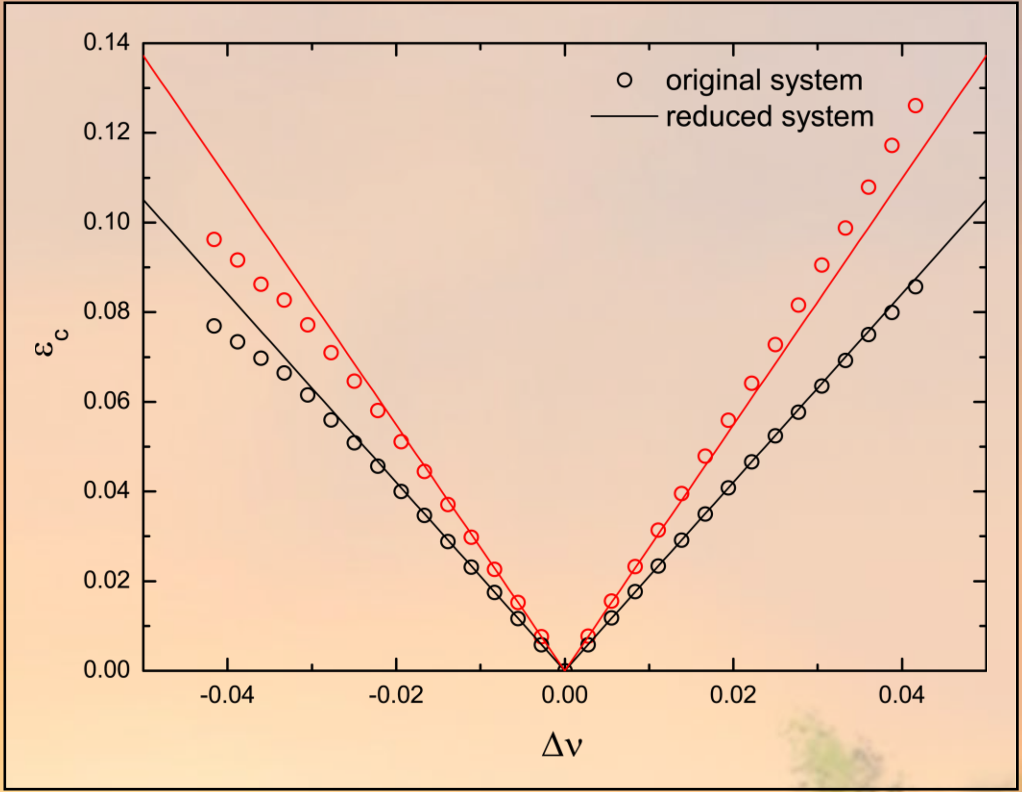
$$\Delta\upsilon = \upsilon - 1/T$$

Arnoldo liežuviai:

$$a = 2$$

$$b = 10$$

$$\tau = 0.7$$



Fazės redukcija chaotinėms sistemoms veikiamoms uždelsto grįžtamojo ryšio valdymu (UGRV)

Sistema su stabiliu ribiniu ciklu: $\dot{x} = F\big(x(t)\big) + K\big[x(t-\tau) - x(t)\big]$

Jungtinė lygtis dėl FAF: $\dot{z} = -A^T(t)z(t) - B^T(t+\tau)z(t+\tau)$

$$A(t) = DF\big(x_c(t)\big) - K$$
$$B(t) = K$$

Delsos laikas τ yra lygus FAF periodui, taigi jungtinė lygtis supaprastėja iki:

$$\dot{z} = -\big[DF\big(x_c\big)\big]^T z(t)$$

Fazės redukcija chaotinėms sistemoms veikiamoms uždelsto grįžtamojo ryšio valdymu (UGRV)

Sistema su stabiliu ribiniu ciklu: $\dot{x} = F\left(x(t)\right) + K\left[x(t-\tau) - x(t)\right]$

Jungtinė lygtis dėl FAF: $\dot{z} = -A^T(t)z(t) - B^T(t+\tau)z(t+\tau)$

$$A(t) = DF\left(x_c(t)\right) - K$$
$$B(t) = K$$

Delsos laikas τ yra lygus FAF periodui, taigi jungtinė lygtis supaprastėja iki:

$$\dot{z} = -\left[DF\left(x_c\right)\right]^T z(t)$$

FAF forma nepriklauso nuo to, kokia buvo parinkta valdymo matrica K

Fazės redukcija chaotinėms sistemoms veikiamoms uždelsto grįžtamojo ryšio valdymu (UGRV)

Sistema su stabiliu ribiniu ciklu: $\dot{x} = F\big(x(t)\big) + K\big[x(t-\tau) - x(t)\big]$

Jungtinė lygtis dėl FAF: $\dot{z} = -A^T(t)z(t) - B^T(t+\tau)z(t+\tau)$

$$A(t) = DF\big(x_c(t)\big) - K$$
$$B(t) = K$$

Delsos laikas τ yra lygus FAF periodui, taigi jungtinė lygtis supaprastėja iki:

$$\dot{z} = -\big[DF\big(x_c\big)\big]^T z(t)$$

FAF forma nepriklauso nuo to, kokia buvo parinkta valdymo matrica K

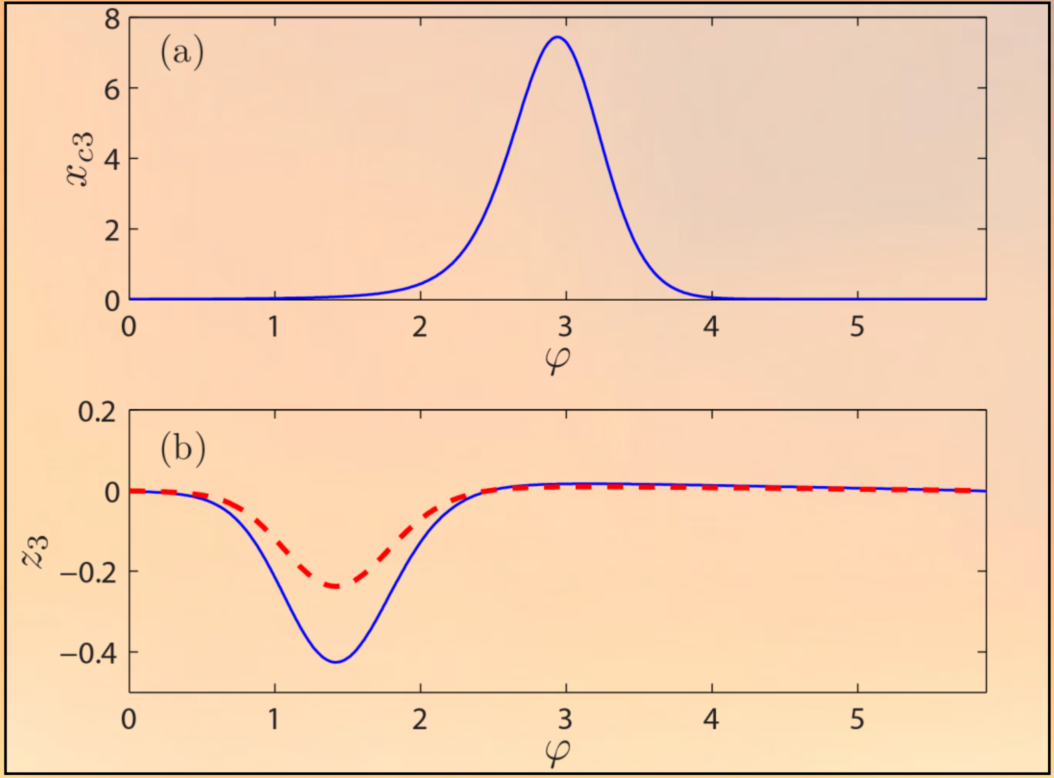
$$z^{(2)}(\varphi) = \alpha z^{(1)}(\varphi)$$

Proporcingumo koeficientas α gali būti surastas iš pradinių sąlygų:

$$\alpha^{-1} = z^{(1)^T}(0)\dot{x}_c(0) + \int_{-\tau}^{0} z^{(1)^T}(\tau+\vartheta)K^{(2)}\dot{x}_c(\vartheta)d\vartheta$$

Pavyzdys: Rosslerio sistema stabilizuota UGRV

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_3$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + 0.2x_2 + K\left[x_2(t-\tau) - x_2(t)\right]$$
$$\dot{x}_3 = 0.2 + x_3(x_1 - 5.7)$$



K_1=0.15 and K_2=0.5

$\alpha \approx 0.558$

Rezultatų santrauka

- Fazės redukcijos metodas pritaikytas silpnai perturbuotom sistemom aprašomomoms lygtimis su delsa ir turinčiom stabilųjį ribinį ciklą.
- Sistemom su delsa lygtis dėl FAF su atitinkamomis pradinėmis sąlygomis yra gauta dviem skirtingais būdais. (kito būdo čia nedemonstravau)
- Metodo veikimas yra pademonstruotas skaitmeniškai Mackey-Glass sistemai ir chaotinei Rosslerio sistemai stabilizuotai UGRV metodu.
- Orbitos stabilizuotos UVGR metodu FAF forma nepriklauso nuo valdymo matricos.

Padėka

Mokslinis tyrimas finansuojamas Europos socialinio fondo lėšomis pagal visuotinės dotacijos priemonę.

Pabaiga