5 rango tenzoriaus supaprastinimas panaudojus grupių teoriją

Viktor Novičenko

Liepa 2020, Vilnius

Vilnius University

Uždavinio formulavimas

Trimatėje erdvėje turime elektrinio lauko, magnetinio lauko ir srovės tankio vektorius, kurių komponentęs sieja sąryšiai:

$$J_i = \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \gamma_{ijklm} E_j E_k E_l H_m$$

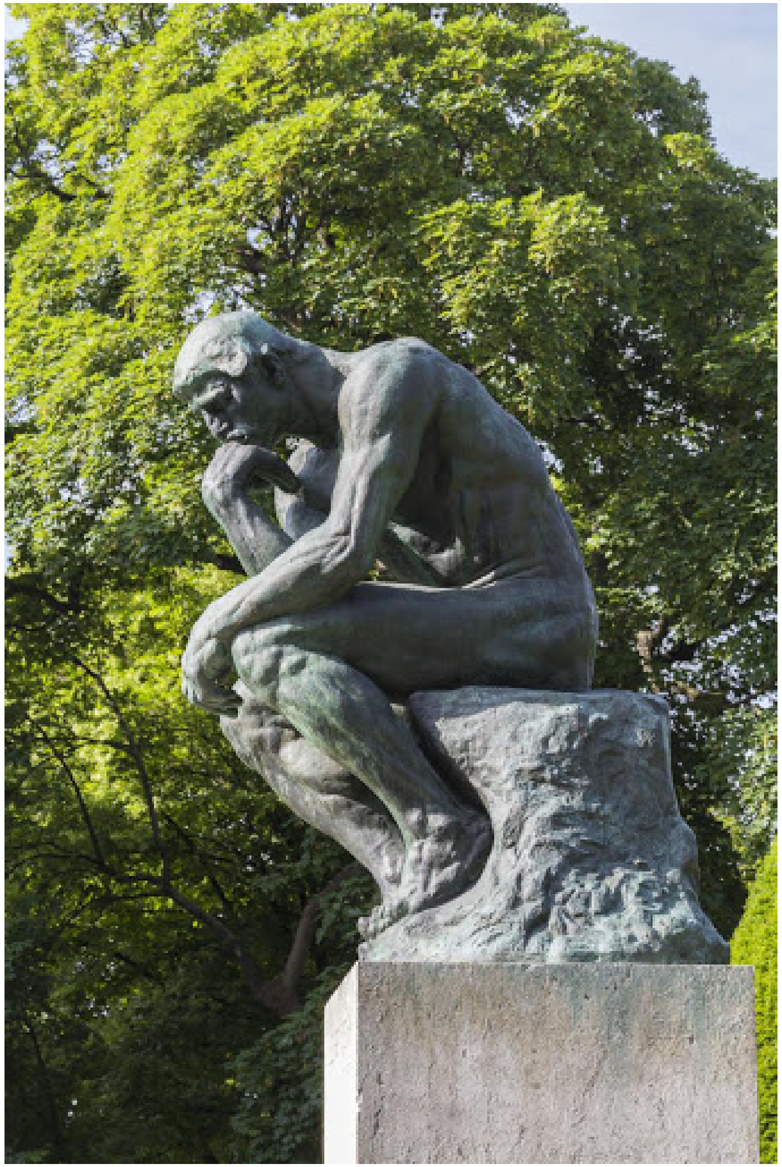
penkto rango tenzorius γ_{ijklm} turi 3x3x3x3x3=243 komponenčių

Terpė turi kubinę simetrija - ar tikrai reikia visų 243 komponenčių?

Aš moku spresti tik modifikuotą uždavinį - turime vektorinį dydį $\mathbf{J}\left(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}\right)$ kuriam galioja $\mathbf{J}\left(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)=\mathbf{0}$. Skleisdami Teiloro eilutę pirmoje eilėje pagal visus vektorius gausime:

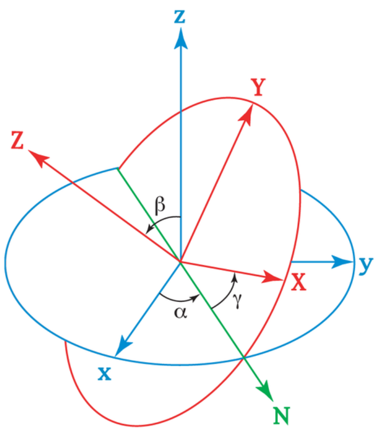
$$J_i = \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \gamma_{ijklm} A_j B_k C_l D_m$$

Kaip Algirdas išsprendė šį uždavinį



Kol kas tik tiesinė algebra (jokios grupių teorijos)

Visi posūkiai 3-matėje erdveje aprašomi 3-mis Eulerio kampais.



$$T_Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_X(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$T_Z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bendra transformacijos matrica $T = T_Z(\gamma)\, T_X(\beta)\, T_Z(\alpha)$

Matrica yra ortogonali, nes $T^{-1} = T_Z^{-1}(\alpha)\, T_X^{-1}(\beta)\, T_Z^{-1}(\gamma) = T_Z^T(\alpha)\, T_X^T(\beta)\, T_Z^T(\gamma) = T^T$
arba komponentėm

$$TT^T = \mathbf{1} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{3} T_{ij} \left(T^T\right)_{jk} = \sum_{j=1}^{3} T_{ij} T_{kj} = \delta_{ik}$$

Vektorius gali būti suprojektuotas į seną arba į naują koordinačių sistemą

$$\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3] = [A'_1, A'_2, A'_3]$$

$$A'_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ij} A_j \quad A_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ji} A'_j$$

Tesiam tiesinę algebrą

$$J_i = \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \gamma_{ijklm} A_j B_k C_l D_m$$

$$X_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ji} X'_j$$

$$\sum_s T_{si} J'_s = \sum_{\substack{j,k,l,m \\ n,p,q,r}} \gamma_{ijklm} T_{nj} T_{pk} T_{ql} T_{rm} A'_n B'_p C'_q D'_r$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{3} T_{ij} T_{kj} = \delta_{ik}}$$

Dauginame iš T_{ti} , sumuojam per visus i , ir pasinaudoję ortogonalumo sąryšiu gauname

$$J'_t = \sum_{n,p,q,r} \left[\sum_{i,j,k,l,m} T_{ti} T_{nj} T_{pk} T_{ql} T_{rm} \gamma_{ijklm} \right] A'_n B'_p C'_q D'_r = \sum_{n,p,q,r} \gamma'_{tnpqr} A'_n B'_p C'_q D'_r$$

Tuomet tenzoriaus naujos komponentės išsireiškia per senas taip

$$\gamma'_{tnpqr} = \sum_{i,j,k,l,m} \boxed{T_{ti} T_{nj} T_{pk} T_{ql} T_{rm}} \gamma_{ijklm}$$

kas čia per "žveris"

Tesiam tiesinę algebrą

Panagrinėkime paprastesnį atvejį $\gamma'_{kl} = \sum_{i,j} T_{ki} P_{lj} \gamma_{ij}$

$$\gamma'_{kl} = T_{k1}P_{l1}\gamma_{11} + T_{k1}P_{l2}\gamma_{12} + T_{k1}P_{l3}\gamma_{13} + T_{k2}P_{l1}\gamma_{21} + T_{k2}P_{l2}\gamma_{22} + T_{k2}P_{l3}\gamma_{23} + T_{k3}P_{l1}\gamma_{31} + T_{k3}P_{l2}\gamma_{32} + T_{k3}P_{l3}\gamma_{33}$$

$$\boldsymbol{\gamma}' = \begin{pmatrix} \gamma'_{11} \\ \gamma'_{12} \\ \gamma'_{13} \\ \gamma'_{21} \\ \gamma'_{22} \\ \gamma'_{23} \\ \gamma'_{31} \\ \gamma'_{32} \\ \gamma'_{33} \end{pmatrix} = T \otimes P \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{32} \\ \gamma_{33} \end{pmatrix} = T \otimes P \boldsymbol{\gamma}$$

čia turime matricų tiesioginę sandaugą

$$T \otimes P = \begin{pmatrix} T_{11}P & \cdots & T_{1n}P \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m1}P & \cdots & T_{mn}P \end{pmatrix}$$

Taigi jei vektorizuosime 5 rango tenzorių (vektorius iš 243 komponenčių), tai turėsime

$$\boldsymbol{\gamma}' = T \otimes T \otimes T \otimes T \otimes T \boldsymbol{\gamma} = T^{(5)} \boldsymbol{\gamma}$$

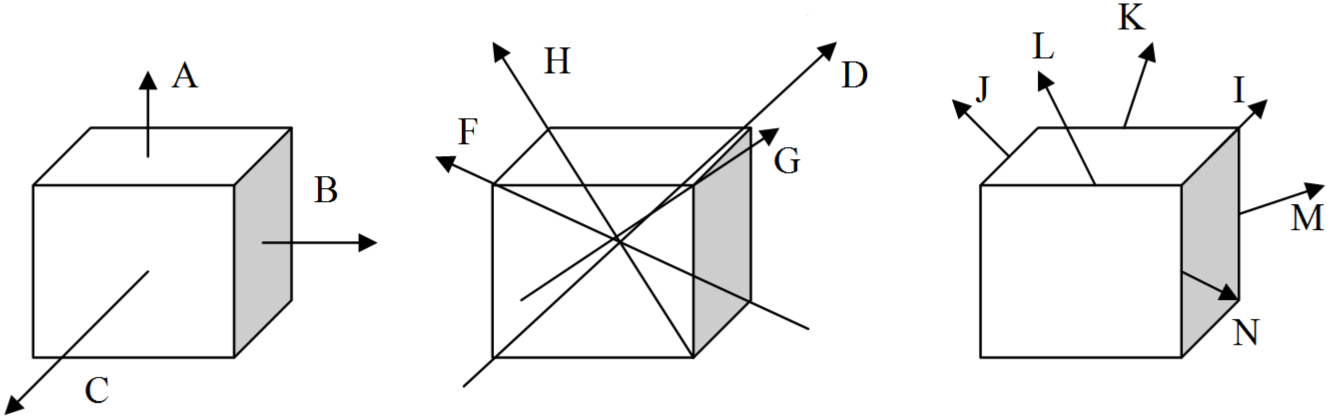
matrica kurios dimensija 243x243

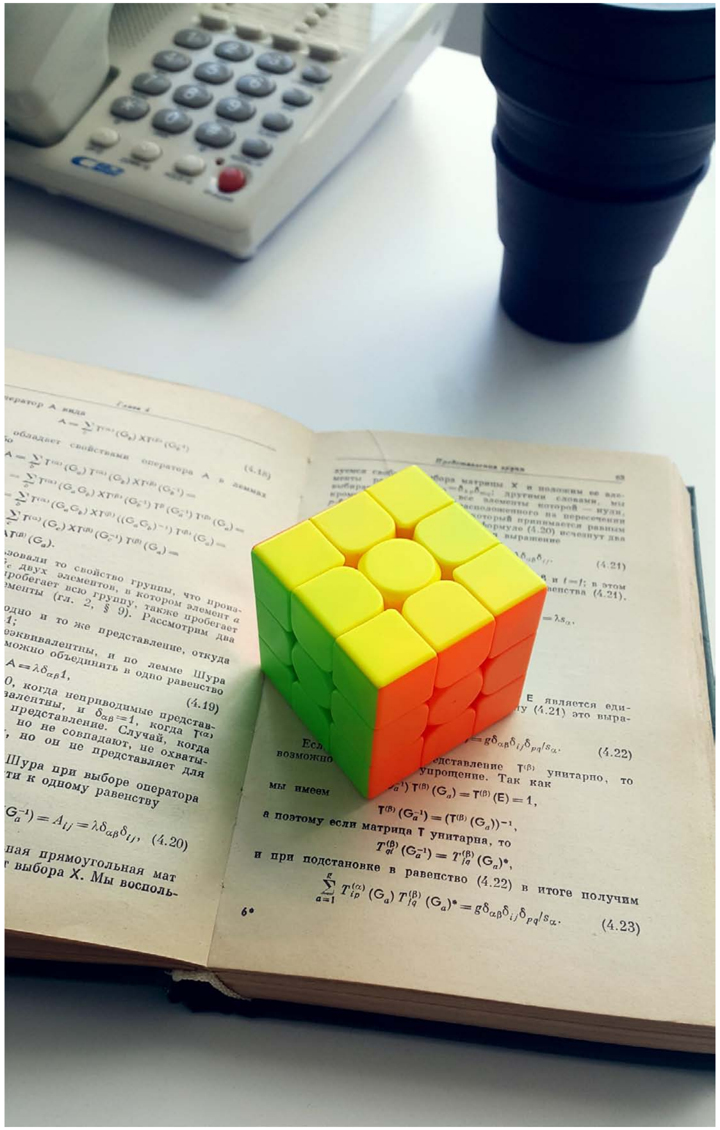
Grupių teorijos panaudojimas

Vilnius
University

Oktaedrinė grupė “O” arba keturių objektų perstatymo grupė S_4

Grupę sudaro visį kūbo posųkiai 3-matėje erdvėje, kurie gražina kūbą į pradinę padeti.
Grupę sudaro 24 elementai.





Grupės elementai yra posūkiai prieš laikrodžio rodyklę pagal ašis (A, B, C, D, F, G, H, I, J, K, L, M, N).
(A, B, C) - 90°, 180° ir 270°
(D, F, G, H) - 120° ir 240°
(I, J, K, L, M, N) - 180°

Grupės neredukuojamas 3-matis įvaizdis T

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \; C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \; F_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \; I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \; K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

klasės pavadinimas	E	$8C_3$	$3C_2$	$6C_4$	$6C_2'$
kokie nariai yra klasėje	E	$D_1\ D_2\ F_1\ F_2\ G_1\ G_2\ H_1\ H_2$	$A_2\ B_2\ C_2$	$A_1\ A_3\ B_1\ B_3\ C_1\ C_3$	$I\ J\ K\ L\ M\ N$
įvaizdžio T charakteris	3	0	-1	1	-1

Įvaizdžio neredukuojamumo kriterijus: $\sum_{p=1}^{5} c_p \left|\chi_p\right|^2 = 1 \cdot (3)^2 + 8 \cdot (0)^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (1)^2 + 6 \cdot (-1)^2 = 24$

Redukuojamas 243-matis įvaizdis $T^{(5)}$

Įvaizdys $T^{(5)}$ yra 5 kartus tiesioginė sandauga įvaizdžių T.

klasės pavadinimas	E	$8C_3$	$3C_2$	$6C_4$	$6C_2'$
įvaizdžio T_{tr} charakteris	1	1	1	1	1
įvaizdžio T charakteris	3	0	-1	1	-1
įvaizdžio $T^{(5)}$ charakteris	243	0	-1	1	-1

$$T^{(5)} = m_{\mathrm{tr}} T_{\mathrm{tr}} \oplus mT \oplus \ldots$$

$$m_{\mathrm{tr}} = \frac{1 \cdot (243 \times 1) + 8 \cdot (0 \times 1) + 3 \cdot (-1 \times 1) + 6 \cdot (1 \times 1) + 6 \cdot (-1 \times 1)}{24} = \frac{243 - 3 + 6 - 6}{24} = 10$$

$$m = \frac{1 \cdot (243 \times 3) + 8 \cdot (0 \times 0) + 3 \cdot (-1 \times -1) + 6 \cdot (1 \times 1) + 6 \cdot (-1 \times -1)}{24} = \frac{729 + 3 + 6 + 6}{24} = 31$$

Sudarom projekcini operatorių projektuojantį į trivialaus įvaizdžio invariantinius poerdvius:

$$P_{\mathrm{tr}} = \sum_{X=1}^{24} T_{\mathrm{tr}}(X)\, T^{(5)}(X) = \sum_{X=1}^{24} T^{(5)}(X)$$

$$P_{\mathrm{tr}} \mathbf{v}_a = \begin{cases} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_{\mathrm{tr}}^t \text{ - vektorius kuris transformuojasi pagal trivialūjį įvaizdį} \end{cases} \qquad \text{čia } t = 1, 2, \ldots, 10$$

Pabaiga

Vilnius
University